Aplicații ale metodelor matematice în probleme de repartiție

M. ALTÂR, I. MIASNICOV, M. RĂDULESCU, D. TH. RĂDULESCU

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

Scanned with OKEN Scanner

M. ALTĂR, ing. I. MEASNICOV, ing. M. RĂDULESCU,
D. TH. RĂDULESCU

APLICAȚII ALE METODELOR MATEMATICE ÎN PROBLEME DE REPARTIȚIE

Cu o prefață
de
ACAD. GR. C. MOISIL

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

București, 1964

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În cunoașterea fenomenelor naturii omul de știință procedează în felul următor. Din descrierea unor fenomene sau grupuri de fenomene, prin abstracție, el construiește un model matematic. În același timp se procedează la măsurarea unor mărimi, cu o cît mai mare precizie. O parte din numerele obținute, cele referitoare la condițiile în care se face experiența, sînt introduse în calcule; celelalte sînt comparate cu rezultatele calculelor. Atunci cînd ne asigurăm că numerele obținute de experiență sînt aceleași cu numerele obținute prin calcul, provizoriu, teoria poate înlocui experiența și proiectarea tehnică se face prin calcul fără a repeta experiențele în fiece caz particular.

Din descrierea dată se vede că e nevoie să izolăm anume fenomene destul de simple pe care apoi să le studiem în interdependența lor, să putem face anume măsurători, destul de precise și să putem reproduce fenomenul în condiții destul de variate. Despre toate acestea s-a insistat adesea de către cei ce se ocupă de metodologia științelor.

Un punct asupra căruia este însă de asemenea nevoie să se insiste este acel al felului cum posibilitatea de a efectua calculele influențează dezvoltarea științei și posibilitatea confruntării teorici cu practica, a întrebuințării teoriei în practică.

Construirea mașinilor electronice de calcul a făcut ca posibilitatea de a efectua rapid un volum mare de calcule să crească nebănuit de mult. Tehnica calculului a făcut progrese atît de mari încît ea s-a constituit ca o preocupare de sine stătătoare.

Vom sublinia faptul că grație posibilităților oferite de calculatoarele electronice domeniul întrebuințării metodelor matematice s-a lărgit înglobînd două tipuri de preocupări încadrate în științele societății, cărora li s-a negat pînă de curînd posibilitatea de a fi matematizate: anume fenomene de limbă și anume fenomene economice.

Astăzi studiul unor probleme de lingvistică și a unor probleme de economie nu se mai poate face altfel decît întrebuințînd mijloacele matematice și folosind mașinile electronice de calcul. Modelul matematic este confruntat cu realitatea și apoi folosit tehnic. Astfel, în lingvistică traducerea automată, rezumarea automată, indexarea automată ș.a. se prezintă ca probleme de aplicație, de tehnică. În economie planificarea matematică cu ajutorul programării liniare și neliniare, a programării stohastice, a programării dinamice și a teoriei grafelor, a teoriei cozilor, a teoriei inventarului, a teoriei jocurilor ș.a. se prezintă de asemenea ca probleme de aplicație, de tehnică.

Volumul de față se ocupă de aplicarea metodelor matematice și de întrebuințarea calculatoarelor electronice pentru studiul unor anume probleme concrete de planificare economică.

Studiul întrebuințării metodelor matematice pentru rezolvarea unor probleme economice concrete a fost început în țara noastră de către Institutul de Matematică al Academiei R.P.R., Institutul de Calcul al Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., Institutul de Fizică Atomică al Academiei R.P.R. și Institutul de Matematică al Filialei din Iași a Academiei R.P.R. În aceste institute s-a cercetat teoria matematică și, rezolvîndu-se anume probleme efective, cu date reale, s-a putut stabili metodologia de urmat și s-au cunoscut dificultățile ce trebuie învinse.

Printre acestea, două dificultăți majore au fost puse în evidență.

Pe de o parte, era necesar ca utilitatea întrebuințării metodelor matematice în rezolvarea problemelor de economie concretă să fie recunoscută de masele largi de ingineri și economiști. Împreună cu institutele mai sus enumerate, Comisia de Automatizare a Academiei R.P.R., în sesiunile ei anuale de comunicări științifice, în colocvii și consfătuiri și în expunerile publice ținute cu sprijinul ei, a căutat să arate importanța noilor metode. Ministerul Economiei Forestiere cu Institutul de Studii și Proiectări Forestiere, apoi Ministerul Finanțelor cu Direcția studii și documentare au înțeles importanța acestor probleme.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, era nevoie de cadre bine pregătite. La Facultatea de matematică și fizică — azi Facultatea de matematică și mecanică — a Universității din București s-au creat secțiile de specializare în Mașini de calcul și în Statistică matematică la care se țin cursuri regulate asupra întrebuințării metodelor matematice în rezolvarea problemelor economice.

Alte instituții au început și ele să organizeze cursuri asupra acestor probleme. Direcția Centrală de Statistică duce de multă vreme o muncă serioasă de ridicare a nivelului matematic al celor ce lucrează în cadrul ei. Direcția de studii și documentare din Ministerul Finanțelor a organizat cursuri în acest domeniu pentru economiști. De asemenea, Institutul de științe economice (I.S.E.) și Institutul de cercetări economice al Academiei R.P.R., Institutul de proiectări și cercetări al materialelor de construcții (I.P.C.M.C.).

Cu ocazia acestor cursuri s-a remarcat lipsa unor manuale care să pună la îndemîna cadrelor ce lucrează în unitățile economice cunoștințele necesare aplicării metodelor matematice și utilizării mașinilor electronice de calcul în problemele de economie, planificare și finanțe.

Sarcina de a scrie un astfel de manual și-au asumat-o tovarășii din colectivul Ministerului Finanțelor, compus din ing. I. Measnicov, ing. M. Rădulescu, D. Th. Rădulescu și M. Altăr.

Cititorii vor aprecia felul cum autorii și-au îndeplinit sarcina.

Mărturisesc că mi-a făcut multă plăcere și cinste dorința exprimată de autori de a prezenta acest volum. Sînt convins că acest volum vine la un moment potrivit și umple un gol important în literatura noastră economică.

Volumul are cîteva merite pe care e bine să le subliniem.

Adresîndu-se mai ales economiștilor, e bine că autorii au căutat să nu facă expunerea rebarbativă, neinsistînd nici asupra aparatului matematic, nici asupra celui de programare la calculatoarele electronice. Rezolvarea unei probleme economice efective prin metode matematice cere colaborarea unor economiști, a unor matematicieni și a unor programatori (de fapt grupul trebuie completat prin ingineri specialiști în probleme tehnologice și prin matematicieni specialiști în analiza numerică). Trebuie să ne învățăm că fără o astfel de colaborare munca nu poate da bune rezultate. O colaborare cere în primul rînd ca fiecare să facă ceea ce știe să facă: nici economistul nu trebuie să încerce să facă matematică, nici matematicianul economie. Dar tot atît de mult o colaborare înseamnă că cei ce colaborează trebuie să se înțeleagă între ei. Matematicienii și economiștii trebuie să ajungă să se înțeleagă, pentru a scrie sub forma matematică condițiile economice ale problemei. Cu tehnologii, cu specialiștii în analiza numerică vor trebui să găsească împreună soluția cea mai bună. Această soluție însă, pentru a fi utilizabilă, trebuie să poată fi programată la calculator.

Pentru crearea acestei posibilități de înțelegere cartea de față va aduce contribuția ei.

În al doilea rînd, nu trebuie uitat că problemele economice se pun de fiecare dată cu specificul lor local. Deși oriunde și oricînd o problemă de programare liniară are aceeași soluție, totuși, atunci cînd ecuațiile și inegalitățile traduc realități economice, transcrierea acestor condiții locale nu poate fi făcută decît ținînd seama de situația locală. Iată de ce o expunere privind întrebuințarea metodelor matematice în economie capătă un înțeles mai viu atunci cînd e alimentată de exemple scoase din practica realităților noastre. Volumul de față are meritul de a fi inspirat din problemele puse și rezolvate în țara noastră.

În al treilea rînd vrem să insistăm asupra faptului că volumul de față ține seama de contribuția matematică adusă de matematicienii din R.P.R. În țara noastră la Institutul de matematică al Academiei R.P.R. s-au adus contribuții matematice interesante privind problema transporturilor: obținerea planului optim pentru o perioadă din planurile optime pentru alte perioade, chiar cînd apar noi centre de producție sau de consum, planificarea transporturilor produselor exporta-

Scanned with OKEN Scanner

bile și a produselor neomogene, reducerea rezolvării unei probleme „mari" la rezolvarea repetată a două probleme mai mici ș.a. La Institutul de calcul al filialei Cluj a Academiei R.P.R. și Institutul de matematică al filialei Iași a Academiei R.P.R. s-au făcut de asemenea interesante cercetări teoretice cu aplicații practice în acest domeniu.

Volumul de față introduce pe cititori în studiul unora din aceste probleme.

În ultima vreme s-au produs două evenimente pe care vrem să le menționăm. Pe de o parte, la Centrul de calcul al Universității din București a fost instalat calculatorul electronic CIFA-3; aceasta deschide largi perspective muncii de cercetare științifică, de aplicație în practică și de instruire a cadrelor dusă de Secția de mașini de calcul a Facultății de matematică din București. Pe de altă parte, pe lîngă Academia R.P.R. s-a înființat un Centru de statistică; acest centru va avea un rol de seamă în organizarea muncii de cercetare științifică și de aplicații practice în acest domeniu precum și de colaborare cu Secția de statistică a Facultății de matematică. Alte instituții didactice au început să orienteze munca în această direcție. Citățm Institutul de științe economice (I.S.E.).

Nu ne îndoim că volumul de față va contribui în chip esențial la folosirea progreselor acestor noi discipline în desăvîrșirea construcției socialiste în Republica Populară Română.

Acad. G R. C. MOISIL

INTRODUCERE

Rolul pe care îl joacă metodele matematice moderne în cercetările economice și în planificare este recunoscut în prezent de majoritatea economiștilor. Necesitatea folosirii acestor metode a fost determinată de dezvoltarea impetuoasă a economiei, de modificările adînci în tehnica și în structura producției, de caracterul tot mai complex al relațiilor dintre factorii economici și, în consecință, de cerințele mereu crescînde ale planificării și conducerii economiei naționale.

În aceste condiții s-a format și s-a dezvoltat o nouă ramură a matematicii aplicate [1]. *Răspîndirea largă a acestei noi discipline se datorește faptului că aplicarea ei permite găsirea celor mai judicioase soluții pentru problemele puse, iar apariția mașinilor electronice permite ca aceste soluții să se poată obține în mod rapid.*

Aplicarea metodelor matematice implică însă o pregătire specială atît a economiștilor, cît și a matematicienilor. Un bun economist trebuie să fie familiarizat cu diferitele metode matematice, astfel încît să poată identifica problemele economice care admit tratarea matematică și tipul de problemă matematică la care conduce fenomenul sau procesul economic studiat. El trebuie să știe să formuleze exact criteriile cantitative susceptibile să fie traduse în relații matematice. La rîndul lor matematicianii trebuie să-și însușească bazele economiei politice marxiste, să cunoască bine procesele economice, ceea ce constituie premisa ca modelele întocmite să prezinte fidel realitatea economică.

Noua disciplină matematică necesită în primul rînd analiza prealabilă a naturii fenomenelor și proceselor economice, deoarece rezultatele ce se obțin cu ajutorul metodelor matematice sînt valabile numai dacă premisele economice au fost just

[1] Denumirea acestei noi discipline nu este încă definitivată. De pildă, academicianul sovietic V. S. Nemcinov, președintele Consiliului științific pentru aplicarea matematicii și tehnicii de calcul de pe lîngă Academia de Științe a U.R.S.S. a propus pentru această disciplină următoarele denumiri: „metodele matematice-economice", „teoria calculelor de planificare", „aplicarea metodelor matematice în cercetările economice și în planificare".

formulate. După cum se știe, matematica nu reprezintă decît un mijloc al analizei cantitative la baza căreia stă o anumită concepție despre natura obiectului.

Actualmente, sarcinile care stau în fața economiștilor constau în dezvoltarea cercetărilor științifice cu privire la folosirea metodelor matematice în economie și planificare pe baza economiei politice marxist-leniniste, precum și în aplicarea largă a acestor metode în practică.

★

Metoda programării matematice face parte din ansamblul noilor discipline matematice, care au primit denumirea de „cercetări operaționale". Acest ansamblu de discipline cuprinde: programarea matematică sau optimală (liniară, neliniară, dinamică, stohastică), teoria firelor de așteptare, teoria jocurilor și altele.

În țările socialiste s-a dezvoltat în special programarea matematică, celelalte capitole ale „cercetărilor operaționale", ca teoria jocurilor și teoria firelor de așteptare, necăpătînd încă o aplicare largă în economie.

Una dintre principalele sarcini ale programării matematice constă în alegerea celor mai eficace metode de folosire a resurselor existente (adică a resurselor naturale, a resurselor de muncă și a mijloacelor de producție) în vederea obținerii celui mai bun rezultat. Cu alte cuvinte, cu ajutorul programării matematice se poate găsi, de exemplu, un plan de producție care să permită ca diferitele cantități din produsele necesare societăți să se obțină cu cele mai mici cheltuieli de muncă (vie și materializată).

Punerea și rezolvarea unei probleme economice cu ajutorul programării matematice cuprinde mai multe faze, și anume:

— Studiul economic al problemei *constă în cercetarea amănunțită a tuturor factorilor economici și tehnici care intervin în procesul cercetat. În general, în orice fenomen sau proces economic intervine un număr foarte mare de factori interdependenți. Luarea în considerare a tuturor factorilor îngreuiază mult rezolvarea matematică a problemei, de multe ori făcînd-o chiar imposibilă, în condițiile mijloacelor actuale de calcul. De aceea în această etapă trebuie să se studieze în prealabil care sînt factorii care nu*

Scanned with OKEN Scanner

influențează în mod esențial procesul sau fenomenul considerat și care, prin urmare, pot fi omiși la rezolvarea matematică a problemei. De asemenea în această etapă trebuie să se analizeze și să se stabilească scopul urmărit (producția sau beneficiul maxim, cheltuielile de muncă sau prețul de cost minim etc.).

— Elaborarea modelului matematic *constituie a doua fază și constă în întocmirea modelului matematic al problemei economice considerate. Modelul matematic este format din două părți, și anume:*

a) funcția de optimizat, *care constă în transcrierea în limbaj matematic a scopului economic stabilit în prima etapă. În literatura de specialitate, funcția de optimizat mai poartă denumirea de: „funcție-scop", „funcție-criteriu" sau „funcție-obiectiv";*

b) condițiile restrictive, *care transcriu în limbaj matematic (sub formă de ecuații sau inecuații) condițiile concrete în care se desfășoară fenomenul sau procesul considerat. De pildă, într-o problemă de producție, printre condițiile restrictive pot figura: condiția de a îndeplini sarcinile de producție la toate sortimentele; condiția de a nu depăși disponibilitățile de forță de muncă, de materie primă și de materiale, capacitățile de producție, energie, combustibil etc.*

— Rezolvarea numerică a modelului matematic. *După verificarea critică a modelului se caută metoda de soluționare (algoritmul de calcul) care să permită găsirea celei mai bune soluții, soluția optimă, a problemei considerate.*

— Analiza rezultatelor obținute. *După găsirea soluției optime, economiștii și tehnicienii trebuie să analizeze rezultatele date de calculul matematic și să treacă la traducerea lor în practică. În unele cazuri, soluția găsită poate fi adaptată, luînd în considerație și unii factori de care nu s-a ținut seama inițial.*

Dacă în modelul matematic atît funcția de optimizat, cît și condițiile restrictive sînt exprimate ca relații liniare (de gradul I), atunci avem de-a face cu o problemă de programare liniară. Dacă însă fie funcția de optimizat, fie unele dintre restricțiile problemei (fie și una, și altele) se exprimă ca relații neliniare, atunci avem de-a face cu o problemă de programare neliniară.

După cum s-a arătat mai înainte, programarea liniară cere ca funcția de optimizat și relațiile de restricție să fie exprimate în ecuații sau inecuații de gradul I. În realitate, aceste relații nu sînt totdeauna liniare, însă pentru necesitățile practice ele pot fi aproximate prin acestea, astfel încît cu ajutorul programării

Scanned with OKEN Scanner

liniare se poate rezolva o mare diversitate de probleme, cum sînt: găsirea planului care să asigure, în condițiile date, volumul maxim al producției; cea mai bună variantă de repartizare a sarcinilor de producție pe mașini și utilaje; găsirea compoziției optime a amestecurilor; croirea rațională a materialelor; folosirea rațională a terenurilor agricole; întocmirea planurilor optime de aprovizionare-desfacere etc. etc. Sfera de aplicare a programării liniare este foarte vastă. Cu ajutorul acesteia se poate găsi cea mai bună soluție fără să se mai examineze mulțimea imensă de soluții pe care le admite, în general, o problemă economică.

Rezolvarea numerică a acestor probleme se face cu ajutorul diferitelor algoritme, dintre care cel mai utilizat este algoritmul simplex. Folosirea acestei metode cere însă un mare volum de muncă și necesită, în general, utilizarea mașinilor electronice de calcul.

Unele probleme de programare liniară se pot soluționa însă cu ajutorul unor metode de calcul mai simple decît metoda generală simplex. Astfel, de exemplu, problemele de aprovizionare-desfacere pot fi rezolvate cu ajutorul unor metode speciale, mult mai simple.

În literatura de specialitate, problemele de aprovizionare-desfacere sînt cunoscute sub denumirea de „problema de transport". Problema determinării planurilor (soluțiilor) optime de aprovizionare-desfacere (de transport) a fost pusă, pentru prima dată, în U.R.S.S. de A. N. Tolstoi, care în lucrarea sa publicată în 1930, Planificarea transporturilor *a expus metoda de găsire a planului care să corespundă celui mai mic număr de kilometri parcurși. În cadrul aplicării acestei metode, întocmirea variantelor planului se face cu ajutorul schemelor de comunicații. Problema de transport a fost abordată în S.U.A., în 1941, de F. L. Hitchcook, care a folosit pentru rezolvarea ei forma matricială. Mai tîrziu, în 1949, G. B. Dantzig a formulat-o ca o problemă de programare liniară și a elaborat o metodă nouă pentru rezolvarea ei. În mod cu totul independent, matematicienii sovietici L. V. Kantorovici și M. K. Gavurin au elaborat o metodă analogă de rezolvare a problemei de transport (metoda potențialelor), pe care au publicat-o în 1949.*

Ulterior s-au găsit și alte metode de soluționare a acestei probleme, metode care pot fi aplicate și la rezolvarea unor probleme privind amplasarea întreprinderilor, întocmirea balanței optime, încărcarea utilajului, repartiția producției între întreprinderi etc. Datorită faptului că, pe de o parte, la problemele ce se pot rezolva cu ajutorul acestor metode atît studiul lor economic, cît și rezolvarea matematică sînt relativ simple și accesibile economiștilor

Scanned with OKEN Scanner

fără o pregătire matematică specială, iar pe de altă parte că aplicarea lor practică poate aduce economii importante, metodele de soluționare a modelului problemei de transport au căpătat o mai largă răspîndire decît celelalte metode de programare liniară.

Rezultatele obținute cu ajutorul metodelor matematice atît la noi în țară, cît și în străinătate în determinarea celor mai raționale soluții pentru problema de transport au dovedit posibilitatea și utilitatea aplicării acestora pe scară largă. Planurile de transport întocmite cu ajutorul metodelor matematice au dovedit posibilitatea reducerii cheltuielilor de transport cu 4—15% față de planurile întocmite fără ajutorul acestora.

Importanța reducerii cheltuielilor de transport legate de aprovizionarea și desfacerea produselor poate fi apreciată la justa ei valoare dacă se ține seama de rolul pe care îl joacă transportul în economia națională.

În 1962, în țara noastră, această ramură a producției materiale a participat cu 3,5% la crearea produsului social total. Din totalul fondurilor fixe productive, 14,5% au revenit transportului și telecomunicațiilor. Din totalul muncitorilor, 7,2% au făcut parte din ramura transporturilor. De fapt însă aceste cifre sînt și mai mari dacă se are în vedere activitatea de transport din celelalte ramuri ale producției materiale.

Necesitatea și utilitatea îmbunătățirii planificării în domeniul repartițiilor în scopul reducerii la minimum a cheltuielilor de transport decurg și din următoarele considerente: din totalul mărfurilor transportate în 1962, de 31 359 de milioane t/km, 24 419 de milioane t/km, adică peste 78%, au fost transportate pe calea ferată. Pe de altă parte, din totalul de 92 022 000 t transportate pe C.F.R. în 1962, 69% revin unui număr restrîns de produse de mare volum, ca țițeiul și produse petroliere, cărbune, cocs, produse de lemn, lemne de foc, produse de cariere și balastiere, materiale de construcții, cereale și sfeclă de zahăr.

Această structură a mărfurilor transportate arată că aplicarea metodelor matematice la repartiția chiar și a unui număr restrîns de produse omogene de volum mare poate să aducă economii importante. Față de 24 419 milioane t/km, cît a reprezentat în 1962 transportul pe C.F.R., produselor arătate mai înainte le revin 14 123 de milioane t/km, iar reducerea acestora cu numai 4% însumează o economie de circa 560 000 000 t/km.

De aici se poate vedea importanța cunoașterii de către economiști și planificatori a metodelor matematice moderne cu aplicație în economie. Desigur, introducerea în practică a metodelor matematice moderne reclamă și existența unor mașini electronice cu

Scanned with OKEN Scanner

capacitate de memorizare corespunzătoare, precum și reorganizarea evidențelor și a comunicării datelor.

În lucrarea de față, prima în limba romînă de acest gen, sînt expuse regulile de rezolvare și domeniile de aplicare a problemei de transport, la un nivel accesibil majorității economiștilor. Sperăm că ea va contribui la răspîndirea acestor metode noi în rîndurile economiștilor și planificatorilor practicieni, constituind un mijloc eficace de descoperire a rezervelor interne.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

PROBLEMA GENERALĂ DE TRANSPORT

Problema de transport în forma ei generală constă în găsirea unui plan de transport al unui produs omogen în așa fel, încît să se obțină cel mai bun rezultat economic. Mai concret, această problemă se formulează astfel : să presupunem că există un număr de centre de expediție (depozite, fabrici producătoare etc.) de unde urmează să se transporte un produs omogen (ciment, cherestea, zahăr etc.) la mai multe centre de destinație (întreprinderi ale industriei prelucrătoare, centre de consum etc.). Cunoscîndu-se cantitățile disponibile în fiecare centru de expediție și cantitățile necesare fiecărui centru de destinație, precum și distanțele dintre ele (cheltuielile de transport respective), se cere să se întocmească un plan de transport în așa fel, încît totalul tonelor-kilometri (totalul cheltuielilor de transport) să fie minim.

Vom lua următorul exemplu :

Să presupunem că 3 centre de expediție 1, 2 și 3 trebuie să aprovizioneze cu un produs 4 centre de destinație 1, 2, 3 și 4. Distanțele de la centrele de expediție la centrele de destinație sînt următoarele :

De la centrul de expediție 1 la centrul de destinație 1...35 km ;
De la centrul de expediție 1 la centrul de destinație 2... ...42 km ;
De la centrul de expediție 1 la centrul de destinație 3... ...80 km ;
De la centrul de expediție 1 la centrul de destinație 4... ...66 km, ;
De la centrul de expediție 2 la centrul de destinație 1... ...40 km ;
De la centrul de expediție 2 la centrul de destinație 2... ...38 km ;
De la centrul de expediție 2 la centrul de destinație 3... ...30 km ;
De la centrul de expediție 2 la centrul de destinație 4... ... 32 km ;
De la centrul de expediție 3 la centrul de destinație 1... ... 42 km ;

Scanned with OKEN Scanner

De la centrul de expediție 3 la centrul de destinație 2... ... 22 km ;
De la centrul de expediție 3 la centrul de destinație 3... ... 79 km ;
De la centrul de expediție 3 la centrul de destinație 4... ... 37 km.

La centrele de expediție există următoarele cantități disponibile :

la centrul 1 . . . . . 10 vagoane [1]
la „ 2 . . . . . 14 vagoane
la „ 3 . . . . . 20 de vagoane

Total 44 de vagoane

În sfîrșit, centrelor de destinație le sînt necesare următoarele cantități :

la centrul 1 . . . . . 5 vagoane
la „ 2 . . . . . 8 vagoane
la „ 3 . . . . . 22 vagoane
la „ 4 . . . . . 9 vagoane

Total 44 de vagoane

Aceste date se pot scrie concentrat sub formă de tabel astfel :

Tabelul 1.0.01

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	Cantitatea disponibilă la centrele de expediție (vagoane)
1	35	42	80	66	10
2	40	38	30	32	14
3	42	22	79	37	20
Cantitatea necesară centrelor de destinație (vagoane)	5	8	22	9	44

În partea centrală a tabelului sînt trecute distanțele dintre centrele de expediție și centrele de destinație. În ultima coloană sînt indicate cantitățile disponibile în centrele de expediție, iar în ultima linie cantitățile necesare centrelor de destinație.

[1] Considerăm vagoanele de 10 t.

Pentru problema de mai sus se pot întocmi mai multe planuri de transport [1].

Fără ajutorul metodelor matematice s-ar putea întocmi, de exemplu, un plan raţional pe baza următorului principiu: fiecare destinatar să primească, în limita posibilităţilor, cantitatea necesară de la cel mai apropiat centru de expediţie. Astfel:

— Centrul de destinaţie 1 are nevoie de 5 vagoane; distanţa pînă la cel mai apropiat centru de expediţie este de 35 km (pînă la centrul 1); prin urmare, necesarul de 5 vagoane al centrului de destinaţie 1 va fi satisfăcut de centrul de expediţie 1. În acest caz, la centrul de expediţie 1 ar mai rămîne disponibile $10 - 5 = 5$ vagoane.

— Necesităţile centrului de destinaţie 2, de 8 vagoane, ar urma să fie satisfăcute de centrul de expediţie 3, care este cel mai apropiat (22 km). Prin aprovizionarea centrului de destinaţie 2 cu 8 vagoane, la centrul de expediţie 3 vor mai rămîne disponibile $20 - 8 = 12$ vagoane.

— Faţă de centrul de destinaţie 3, cel mai apropiat centru de expediţie este centrul 2, care se găseşte la o distanţă de 30 km. Necesităţile centrului de destinaţie 3, de 22 vagoane, nu pot fi satisfăcute în întregime de centrul de expediţie 2, care are disponibile numai 14 vagoane. Restul de $22 - 14 = 8$ vagoane vor trebui să fie aduse de la centrul de expediţie 3, mai apropiat decît centrul 1 (79 km faţă de 80 km). În acest fel, la centrul de expediţie 3, după ce el va aproviziona centrele de destinaţie 2 şi 3, vor mai rămîne disponibile $20 - 8 - 8 = 4$ vagoane.

— În fine, centrul de destinaţie 4 ar urma să fie aprovizionat de cel mai apropiat centru de expediţie 2. Cum însă acest centru nu mai dispune de nici o cantitate, centrul de destinaţie 4 urmează să primească cele 9 vagoane necesare de la centrele de expediţie care mai au disponibilităţi, şi anume de la centrul 1 (5 vagoane) şi de la centrul 3 (4 vagoane).

---

[1] Numărul acestora este ilustrat de tabelul de mai jos, întocmit pe baza unei formule date de L. V. Kantorovici.

Numărul centrelor de expediţie	Numărul centrelor de destinaţie	Numărul variantelor de plan posibile
3	3	90
4	4	6 256
8	5	~ 1 miliard

Această repartiție se prezintă deci în felul următor :

Tabelul 1.0.02

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	Cantitatea disponibilă
1	5			5	10
2			14		14
3		8	8	4	20
Cantitatea necesară	5	8	22	9	44

Prin înmulțirea tonelor transportate de la fiecare centru de expediție la fiecare centru de destinație, după cum reiese din tabelul 1.0.02, cu distanțele dintre acestea (tabelul 1.0.01), obținem :

$$5 \times 35 + 5 \times 66 + 14 \times 30 + 8 \times 22 + 8 \times 79 + 4 \times 37 =$$

$$= 175 + 330 + 420 + 176 + 632 + 148 = 1\,881 \text{ de vagoane-km} =$$

$$= 18\,810 \text{ t/km.}$$

Datele din tabelele 1.0.01 și 1.0.02 pot fi concentrate astfel :

Tabelul 1.0.03

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	Cantitatea disponibilă
1	5 | 35	42	80	5 | 66	10
2	40	38	14 | 30	32	14
3	42	8 | 22	8 | 79	4 | 37	20
Cantitatea necesară	5	8	22	9	44

Căsuțele din acest tabel indică distanțele dintre centrele de expediție și centrele de destinație, iar pătrățelele înscrise în unele căsuțe arată cantitățile ce urmează a fi transportate, conform soluției obținute.

Întocmindu-se acest plan de repartiție după considerentul de mai sus sau după oricare alt considerent, fără folosirea metodelor matematice, nu se poate ști dacă soluția găsită este cea

Scanned with OKEN Scanner

mai bună, adică dacă nu există o altă soluție căreia să-i corespundă un total de tone-km mai mic [1].

Pentru rezolvarea matematică a problemei este necesară în primul rînd întocmirea modelului matematic. În acest scop vom introduce următoarele notații :

m — numărul centrelor de expediție ;
n — numărul centrelor de destinație ;
c — distanțele dintre centrele de expediție și centrele de destinație, sau costurile unitare de transport ;
x — cantitățile de determinat și care urmează să fie transportate de la fiecare centru de expediție la fiecare centru de destinație ;
a — cantitățile disponibile în centrele de expediție ;
b — cantitățile necesare centrelor de consum.

Literele c și x vor fi însoțite de doi indici, din care primul va arăta numărul de ordine al centrului de expediție, iar al doilea numărul de ordine al centrului de destinație. Cu aceste notații, de exemplu, c_{12} va fi distanța de la centrul de expediție 1 la centrul de destinație 2, iar x_{24} va fi cantitatea (necunoscută încă) care se va transporta de la centrul de expediție 2 la centrul de destinație 4.

Literele a și b vor fi însoțite de cîte un indice, care arată numărul de ordine al centrului de expediție, respectiv al centrului de destinație. Astfel, de pildă, a_2 este cantitatea disponibilă în centrul de expediție 2, iar b_3 cantitatea necesară centrului de destinație 3.

Folosind aceste notații, datele unei probleme de transport cu 3 expeditori și 4 destinatari se pot scrie sub forma următorului tabel :

Tabelul 1.0.04

Centre de expediție ($m = 3$) \ Centre de destinație ($n = 4$)	1	2	3	4	Cantitatea disponibilă
1	x_{11} / c_{11}	x_{12} / c_{12}	x_{13} / c_{13}	x_{14} / c_{14}	a_1
2	x_{21} / c_{21}	x_{22} / c_{22}	x_{23} / c_{23}	x_{24} / c_{24}	a_2
3	x_{31} / c_{31}	x_{32} / c_{32}	x_{33} / c_{33}	x_{34} / c_{34}	a_3
Cantitatea necesară	b_1	b_2	b_3	b_4	

[1] Cititorul, după ce va lua cunoștință de metodele de rezolvare a problemei de transport, se va putea convinge singur că planul găsit nu este cel optim.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru exemplul considerat mai înainte (tabelul 1.0.03), distanțele în km sînt:

$$c_{11} = 35 \text{ km}; \quad c_{21} = 40 \text{ km}; \quad c_{31} = 42 \text{ km};$$
$$c_{12} = 42 \text{ km}; \quad c_{22} = 38 \text{ km}; \quad c_{32} = 22 \text{ km};$$
$$c_{13} = 80 \text{ km}; \quad c_{23} = 30 \text{ km}; \quad c_{33} = 79 \text{ km};$$
$$c_{14} = 66 \text{ km}; \quad c_{24} = 32 \text{ km}; \quad c_{34} = 37 \text{ km};$$

iar cantitățile disponibile și respectiv cele necesare sînt:

$$a_1 = 10; \quad a_2 = 14; \quad a_3 = 20; \quad b_1 = 5; \quad b_2 = 8; \quad b_3 = 22; \quad b_4 = 9.$$

Cantitățile determinate sînt:

$$x_{11} = 5 \text{ vagoane}; \quad x_{21} = 0 \text{ vagoane}; \quad x_{31} = 0 \text{ vagoane};$$
$$x_{12} = 0 \text{ vagoane}; \quad x_{22} = 0 \text{ vagoane}; \quad x_{32} = 8 \text{ vagoane};$$
$$x_{13} = 0 \text{ vagoane}; \quad x_{23} = 14 \text{ vagoane}; \quad x_{33} = 8 \text{ vagoane};$$
$$x_{14} = 5 \text{ vagoane}; \quad x_{24} = 0 \text{ vagoane}; \quad x_{34} = 4 \text{ vagoane}.$$

Vom formula acum modelul matematic al problemei de transport. La început vom considera problema dată de tabelul 1.0.04, avînd 3 centre de expediție și 4 centre de destinație. Vom presupune apoi că suma cantităților disponibile în centrele de expediție este egală cu suma cantităților necesare centrelor de destinație [1], adică:

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4. \tag{1.0.01}$$

În acest caz, suma cantităților ce urmează să fie livrate de fiecare centru de expediție trebuie să fie egală cu disponibilitățile acestuia. Matematic această condiție se traduce prin 3 ecuații, cîte una pentru fiecare centru de expediție:

$$\begin{aligned} &(1)\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \\ &(2)\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \\ &(3)\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3. \end{aligned} \tag{1.0.02}$$

De asemenea, suma cantităților ce urmează să fie primite de fiecare centru de destinație de la toți expeditorii trebuie să fie egală cu necesitățile acestuia. Matematic această condiție

[1] Cazul cînd aceste sume nu sînt egale va fi tratat ulterior.

se redă prin 4 ecuații, cîte una pentru fiecare centru de destinație :

$$(4)\quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$

$$(1.0.03)\qquad (5)\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$

$$(6)\quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$

$$(7)\quad x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$$

De asemenea trebuie avut în vedere că x_{ij} — cantitățile necunoscute ce urmează să fie transportate — nu pot să ia valori negative. Ele pot să fie pozitive sau nule (în exemplul considerat mai înainte — tabelul 1.0.03 — am văzut că x_{12}, x_{13}, de pildă, sînt nule, adică nu se transportă nici o cantitate de la centrul de expediție 1 la centrele de destinație 2 și 3 etc.). Aceste condiții de nenegativitate se scriu matematic în felul următor :

$$x_{11} \geqslant 0\,;\quad x_{12} \geqslant 0\,;\quad x_{13} \geqslant 0\,;\quad x_{14} \geqslant 0$$

$$(1.0.04)\qquad x_{21} \geqslant 0\,;\quad x_{22} \geqslant 0\,;\quad x_{23} \geqslant 0\,;\quad x_{24} \geqslant 0$$

$$x_{31} \geqslant 0\,;\quad x_{32} \geqslant 0\,;\quad x_{33} \geqslant 0\,;\quad x_{34} \geqslant 0$$

Problema constă în determinarea cantităților necunoscute x_{ij}, care, respectînd condițiile (1.0.01), (1.0.02), (1.0.03) și (1.0.04), să facă minim totalul de tone-km, adică :

$$(1.0.05)\quad Z = (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14}) + (c_{21}x_{21} +$$

$$+ c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24}) + (c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} +$$

$$+ c_{34}x_{34}) = \text{minim}.$$

Relațiile (1.0.01), (1.0.02), (1.0.03) și (1.0.04) constituie *condițiile restrictive* ale problemei.

Relația (1.0.05) al cărei minim trebuie să fie găsit este *funcția de optimizat.*

Am formulat astfel modelul matematic pentru o problemă de transport cu numai 3 centre de expediție și 4 centre de destinație, considerînd cantitățile necesare egale cu cele disponibile.

Generalizînd cele de mai sus, putem formula modelul matematic al problemei de transport pentru m centre de expediție și n centre de destinație.

Scanned with OKEN Scanner

Ca și în cazul precedent, vom presupune că suma cantităților disponibile în cele m centre de expediție este egală cu suma cantităților necesare celor n centre de destinație, adică :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \tag{1.0.06}$$

În acest caz vom avea m ecuații, cîte una pentru fiecare centru de expediție, care vor exprima condiția ca suma cantităților livrate de fiecare centru de expediție tuturor centrelor de destinație să fie egală cu disponibilul centrului de expediție respectiv :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \tag{1.0.07}$$

Pentru cele n centre de destinație vom avea n ecuații, care vor exprima condiția ca suma cantităților ce vor fi primite de fiecare centru de destinație de la toate centrele de expediție să fie egală cu necesitățile centrului de destinație respectiv :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \tag{1.0.08}$$

Ca și în cazul de mai înainte, trebuie să fie respectată și condiția ca toate necunoscutele x_{ij} să nu fie negative :

$$\begin{cases} x_{11} \geqslant 0\,; \quad x_{12} \geqslant 0\,; \quad \ldots\ x_{1n} \geqslant 0 \\ x_{21} \geqslant 0\,; \quad x_{22} \geqslant 0\,; \quad \ldots\ x_{2n} \geqslant 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m1} \geqslant 0\,; \quad x_{m2} \geqslant 0\,; \quad \ldots\ x_{mn} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.0.09}$$

De asemenea valoarea funcției de optimizat trebuie să fie minimă, adică :

$$\begin{cases} Z = (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n}) + \\ + (c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n}) + \ldots \\ + (c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}) = \text{minim}. \end{cases} \tag{1.0.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile de mai sus pot fi scrise în formă prescurtată astfel :

Relaţiile (1.0.06) [1] :

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j . \tag{1.0.06'}$$

Relaţiile (1.0.07) :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} x_{1j} = a_1 \\ \sum_{j=1}^{j=n} x_{2j} = a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{j=n} x_{mj} = a_m \end{cases} \tag{1.0.07'}$$

Relaţiile (1.0.08) pot fi notate astfel :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=m} x_{i1} = b_1 \\ \sum_{i=1}^{i=m} x_{i2} = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{i=m} x_{in} = b_n \end{cases} \tag{1.0.08'}$$

În acest caz, relaţia (1.0.10) devine :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_{1j}\, x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} c_{2j}\, x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_{mj} . \tag{1.0.10'}$$

Şi mai prescurtat, relaţiile (1.0.07—1.0.10) pot fi scrise :

$$\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = a_i \text{ (unde } i \text{ ia, pe rînd, valorile } 1, 2, \ldots, m) ; \tag{1.0.07''}$$

[1] În matematică, litera grecească „sigma" (Σ) este folosită pentru scrierea prescurtată a sumelor. De pildă, în loc de $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ se scrie : $\sum_{i=1}^{i=5} a_i$. Dedesubtul simbolului Σ se trece prima valoare pe care o ia indicele i, iar deasupra se trece ultima valoare a acestuia.

(1.0.08″) $\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = b_j$ (unde j ia pe rînd valorile $1, 2, \ldots, n$);

(1.0.09″) $x_{ij} \geqslant 0$ pentru toți i și j;

(1.0.10″) $Z = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$ să fie minimă [1].

Toate ecuațiile modelului (1.0.06—1.0.10) sau formele lor prescurtate sînt ecuații liniare. Numărul necunoscutelor care intervin în model este egal cu $m \times n$, adică cu produsul dintre numărul centrelor de expediție și numărul centrelor de destinație (în cazul exemplului numeric dat, numărul necunoscutelor x_{ij} este egal cu $3 \times 4 = 12$). Numărul ecuațiilor este egal cu $m + n$ (în exemplul nostru numărul ecuațiilor este dat de numărul relațiilor (1.0.02) și (1.0.03), adică cu $3 + 4 = 7$. Oricare dintre aceste $m + n$ ecuații se deduce însă din restul ecuațiilor și din condiția (1.0.06), prin urmare, în problema de transport apar în total cel mult $m + n - 1$ ecuații independente.

Numărul necunoscutelor ($m \times n$) fiind mai mare decît numărul ecuațiilor ($m + n - 1$) problema poate să aibă foarte multe soluții. Dintre acestea trebuie aleasă soluția (sau soluțiile) care face ca funcția de optimizat să ia valoarea minimă (soluția optimă).

★

În rezolvarea problemelor de transport se pot folosi mai multe metode. Acestea sînt de două feluri:

— metode prin care se obțin soluții optime;

— metode cu ajutorul cărora se obțin soluții apropiate de cele optime (și uneori chiar optime), denumite metode de aproximație.

Soluționarea unei probleme de transport se face în general în mai multe etape, numite și iterații sau pași. Prima etapă constă în determinarea unei soluții oarecare pentru problema dată (soluția inițială), fiecare dintre etapele următoare constînd din două faze:

a) verificarea soluției găsite în etapa anterioară pentru a se constata dacă este sau nu optimă;

b) îmbunătățirea soluției în cazul cînd nu este optimă.

În capitolele următoare vom arăta procedeele de determinare a soluțiilor inițiale și metodele de îmbunătățire a acestora.

[1] Simbolul $\sum_i \sum_j$ arată că suma se face după ambii indici (i și j).

Capitolul I

DETERMINAREA SOLUȚIEI INIȚIALE

O dată cunoscute toate datele problemei (cantitățile disponibile în fiecare centru de expediție, cantitățile necesare fiecărui centru de destinație, distanțele dintre fiecare expeditor și destinatar sau costurile de transport respective) se construiește un tabel, după cum am arătat mai înainte (tabelul 1.0.01).

Am văzut că modelul matematic al problemei de transport are un număr de $m + n - 1$ ecuații independente. Orice soluție care conține cel mult un număr de $m + n - 1$ variabile pozitive x_{ij}, acestea neformînd însă cicluri[1], o vom numi *soluție de bază*. Cu alte cuvinte, o soluție de bază folosește cel mult $m + n - 1$ rute de transport. De pildă, în cazul unei probleme de transport cu 7 expeditori și 10 destinatari, numărul rutelor de transport folosite în orice soluție de bază va fi cel mult de $7 + 10 - 1 = 16$. Soluția de bază se spune că este nedegenerată dacă conține exact $m + n - 1$ variabile x_{ij} pozitive.

Pe baza tabelului conținînd datele problemei, determinarea soluției inițiale se poate face prin mai multe procedee. Soluția inițială determinată trebuie să fie soluție de bază nedegenerată, adică să conțină exact $m + n - 1$ variabile x_{ij} pozitive și să nu formeze cicluri.

În cele ce urmează vom examina unele procedee cu ajutorul cărora se pot obține soluții de bază inițiale, și anume: procedeul colțului nord-vest; procedeul elementului minim pe linie; procedeul elementului minim pe coloană; procedeul elementului minim din tabel.

[1] Noțiunea de „ciclu" este explicată la p. 37.

§ 1. Procedeul colțului nord-vest

Procedeul colțului nord-vest este unul dintre primele procedee folosite pentru determinarea unei soluții de bază inițiale. Avantajul procedeului constă în simplitatea regulilor de determinare a soluției inițiale, ceea ce face ca el să fie ușor de programat la mașinile electronice de calcul. Acest procedeu are însă dezavantajul că regulile cu ajutorul cărora se determină soluția inițială nu au la bază un criteriu economic, la determinarea rutelor care urmează să fie folosite neținîndu-se seama de distanțele (costurile) corespunzătoare de transport.

Pentru a se înțelege cît mai bine tehnica de calcul a acestui procedeu, îl vom explica pe baza unui exemplu numeric de dimensiuni reduse. (Procedeul este, bineînțeles, același oricare ar fi numărul expeditorilor și al destinatarilor.)

Astfel, să considerăm problema de transport avînd următoarele date :

Tabelul 1.1.01

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	x_{11} 90	x_{12} 120	x_{13} 140	x_{14} 80	x_{15} 60	120
2	x_{21} 100	x_{22} 140	x_{23} 70	x_{24} 120	x_{25} 90	110
3	x_{31} 60	x_{32} 160	x_{33} 130	x_{34} 140	x_{35} 100	70
Cantitatea necesară	80	72	75	28	45	300

Pentru determinarea soluției inițiale după procedeul colțului nord-vest, se procedează astfel :

Se determină mai întîi valoarea necunoscutei din colțul nord-vest (x_{11}). Întrucît această necunoscută reprezintă cantitatea pe care expeditorul 1 o va livra destinatarului 1, ea se ia egală cu cea mai mică valoare dintre cantitatea disponibilă la expeditorul 1 ($a_1 = 120$) și cantitatea necesară destinatarului 1 ($b_1 = 80$). Rezultă deci $x_{11} = 80$. Deoarece destinatarul 1 a primit întreaga cantitate necesară de la expeditorul 1,

Scanned with OKEN Scanner

de la expeditorii 2 și 3 nu va mai primi nici o cantitate, adică $x_{21} = 0$ și $x_{31} = 0$.

În urma acestei operații, necunoscutele rămase de determinat sînt :

Tabelul 1.1.02

	1	2	3	4	5	
1	80	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	120—80 = 40
2	0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110
3	0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	70
	80—80=0	72	75	28	45	

Se observă că dintre cantitățile rămase necunoscute, cea situată în colțul nord-vest este x_{12}.

Valoarea acesteia se ia egală cu cel mai mic număr dintre 40 (cantitatea rămasă disponibilă la expeditorul 1) și 72 (cantitatea necesară destinatarului 2), deci $x_{12} = 40$. Cu aceasta expeditorul 1 nu mai poate livra nici o cantitate destinatarilor 3, 4 și 5 și deci $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$ și $x_{15} = 0$.

Tabelul 1.1.02 devine :

Tabelul 1.1.03

	1	2	3	4	5	
1	80	40	0	0	0	120—80—40=0
2	0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110
3	0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	70
	80—80=0	72—40=32	75	28	45	

Observăm că în colțul nord-vest cantitatea care trebuie determinată este acum x_{22}. Conform procedeului folosit, vom lua :

$$x_{22} = 32 \text{ și deci } x_{32} = 0.$$

Tabelul 1.1.03 devine :

Tabelul 1.1.04

	1	2	3	4	5	
1	80	40	0	0	0	120—80—40=0
2	0	32	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110—32=78
3	0	0	x_{33}	x_{34}	x_{35}	70
	80—80=0	72—40—32=0	75	28	45	

Scanned with OKEN Scanner

Cantitatea necunoscută aflată în colțul nord-vest al acestui tabel este x_{23}, care se ia egală cu 75 și deci $x_{33} = 0$. Tabelul 1.1.04 devine :

Tabelul 1.1.05

	1	2	3	4	5	
1	80	40	0	0	0	120—80—40=0
2	0	32	75	x_{24}	x_{25}	110—32—75=3
3	0	0	0	x_{34}	x_{35}	70
	80—80=0	72—40—32=0	75—75=0	28	45	

În mod asemănător se determină $x_{24} = 3$ și deci $x_{25} = 0$. Completînd tabelul 1.1.05 cu aceste date, obținem :

Tabelul 1.1.06

	1	2	3	4	5	
1	80	40	0	0	0	120—80—40=0
2	0	32	75	3	0	110—32—75—3=0
3	0	0	0	x_{34}	x_{35}	70
	80—80=0	72—40—32=0	75—75=0	28—3=25	45	

Elementele x_{34} și x_{35} nedeterminate încă vor fi egale respectiv cu 25 și 45, deci soluția inițială obținută cu ajutorul acestui procedeu este :

Tabelul 1.1.07

	1	2	3	4	5	
1	80	40	0	0	0	120
2	0	32	75	3	0	110
3	0	0	0	25	45	70
	80	72	75	28	45	

Totalul tonelor-kilometri corespunzător acestei soluții este :

$$(80 \times 90) + (40 \times 120) + (32 \times 140) + (75 \times 70) +$$
$$+ (3 \times 120) + (25 \times 140) + (45 \times 100) = 30\,090 \text{ t/km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Procedeul elementului minim pe linie

Un alt procedeu pentru determinarea unei soluții inițiale este acela denumit „procedeul elementului minim pe linie", care constă în repartizarea cantităților disponibile la fiecare expeditor celor mai apropiați destinatari, în limitele necesităților acestora. Cu alte cuvinte, din tabelul distanțelor (sau al costurilor de transport) se alege din fiecare linie elementul cel mai mic și în poziția corespunzătoare se trece cea mai mică cantitate dintre cantitatea disponibilă la expeditorul respectiv și cantitatea necesară beneficiarului în cauză. În general, acest procedeu, pornind de la un criteriu economic, conduce la o soluție inițială mai bună decît aceea obținută prin procedeul colțului nord-vest.

Pentru ilustrarea modului de aplicare a acestui procedeu vom folosi același exemplu numeric (vezi tabelul 1.1.01), care va fi :

Tabelul 1.1.08

	1	2	3	4	5	
1	90	120	140	80	60	120
2	100	140	70	120	90	110
3	60	160	130	140	100	70
	80	72	75	28	45	

Conform principiului enunțat, alegem cel mai mic număr (cea mai mică distanță) din linia întîi a tabelului 1.1.08, care este 60 și care corespunde coloanei a cincea (destinatarul 5). Destinatarul 5 are nevoie de 45 t care pot fi livrate de expeditorul 1, acesta avînd disponibile 120 t. Luăm deci $x_{15} = 45$. Deci, întrucît destinatarul 5 este satisfăcut, rezultă că $x_{25} = 0$ și $x_{35} = 0$. După această repartiție, expeditorului 1 îi rămîne un disponibil de $120 - 45 = 75$ t.

În urma acestei operații, necunoscutele rămase nedeterminate sînt :

Tabelul 1.1.09

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	45	120—45=75
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	0	110
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	0	70
	80	72	75	28	45—45=0	

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 1.1.08, cel mai mic număr din linia întîi, exceptînd numărul 60, este 80, corespunzător coloanei a patra. Destinatarul 4 are nevoie de 28 t, care pot fi livrate din disponibilul de 75 t rămas la expeditorul 1. Deci luăm $x_{14} = 28$ iar destinatarul 4 fiind satisfăcut, $x_{24} = 0$ și $x_{34} = 0$. Expeditorului 1 îi mai rămîne un disponibil de 47 t. Tabelul 1.1.09 în acest caz devine :

Tabelul 1.1.10

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	28	45	120—45—28=47
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0	0	110
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0	0	70
	80	72	75	28—28=0	45—45=0	

Deoarece expeditorul 1 mai are o cantitate disponibilă, alegem în continuare cel mai mic număr din linia întîi (exceptînd 60 și 80), care este 90, corespunzător coloanei întîi. Expeditorul 1, neavînd disponibil decît 47 t, va acoperi numai parțial nevoile destinatarului 1. Livrînd destinatarului 1 cantitatea de 47 t ($x_{11} = 47$), expeditorul 1 nu va mai avea nici o cantitate disponibilă și deci $x_{12} = 0$ și $x_{13} = 0$. Destinatarul 1 primind de la expeditorul 1 numai 47 t, urmează ca restul de 80 — 47 = 33 t să fie furnizate de alți expeditori. Astfel tabelul 1.1.10 devine :

Tabelul 1.1.11

	1	2	3	4	5	
1	47	0	0	28	45	120—45—28—47=0
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0	0	110
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0	0	70
	80—47=33	72	75	28—28=0	45—45=0	

În continuare, din tabelul 1.1.08 alegem cel mai mic număr din linia a doua, exceptînd numerele care corespund destinatarilor deja satisfăcuți (90 și 120). Acest număr este 70 și corespunde coloanei a treia. Destinatarul 3 are nevoie de 75 t, care pot fi livrate de expeditorul 2. Deci luăm $x_{23} = 75$, iar $x_{33}=0$, expeditorului 2 rămînîndu-i disponibil 110—75=35 t. Tabelul 1.1.11 devine :

Tabelul 1.1.12

	1	2	3	4	5	
1	47	0	0	28	45	120—45—28—47=0
2	x_{21}	x_{22}	75	0	0	110—75=35
3	x_{31}	x_{32}	0	0	0	70
	80—47=33	72	75—75=0	28—28=0	45—45=0	

Alegînd în continuare cel mai mic număr din linia a doua, găsim numărul 100, corespunzător coloanei întîi. Necesarul destinatarului 1 poate fi acoperit din disponibilul expeditorului 2, deci $x_{21} = 33$, iar $x_{31} = 0$. Expeditorului 2 îi rămîn disponibile numai 2 t. Tabelul 1.1.12 devine :

Tabelul 1.1.13

	1	2	3	4	5	
1	47	0	0	28	45	120—45—28—47=0
2	33	x_{22}	75	0	0	110—75—33=2
3	0	x_{32}	0	0	0	70
	80—47—33=0	72	75—75=0	28—28=0	45—45=0	

Analizînd tabelul 1.1.13, vom repartiza cantităţile rămase disponibile astfel : $x_{22} = 2$ şi $x_{32} = 70$. După această ultimă repartiţie vedem că toţi destinatarii au primit cantităţile solicitate, iar toţi expeditorii au livrat întreaga cantitate disponibilă. Tabelul 1.1.13 devine :

Tabelul 1.1.14

	1	2	3	4	5	
1	47	0	0	28	45	120
2	33	2	75	0	0	110
3	0	70	0	0	0	70
	80	72	75	28	45	

Totalul tonelor-kilometri conform soluţiei iniţiale din tabelul 1.1.14 este :

$$(47 \times 90) + (28 \times 80) + (45 \times 60) + (33 \times 100) + (2 \times 140) + (75 \times 70) + (70 \times 160) = 29\,200 \text{ t/km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. Procedeul elementului minim pe coloană

Acest procedeu foloseşte drept criteriu alegerea elementelor minime situate pe coloane, spre deosebire de procedeul descris anterior, unde se alegeau elementele minime aflate pe linii. Prin urmare, procedeul constă în repartizarea cantităţilor necesare fiecărui destinatar de la cei mai apropiaţi expeditori, în limita disponibilităţilor.

Pentru ilustrare vom folosi tot datele din exemplul anterior.

Conform principiului enunţat, alegem cel mai mic număr (cea mai mică distanţă) din coloana întîi a tabelului 1.1.08, care este 60 şi care corespunde liniei a treia. Destinatarul 1 are nevoie de 80 t din produsul respectiv. Expeditorul 3 poate livra numai 70 t, deci vom lua $x_{31} = 70$. Deoarece expeditorul 3 nu mai are nici o cantitate disponibilă, rezultă că $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 0$. După această repartiţie, destinatarul 1 mai are de primit de la ceilalţi expeditori 10 t. Mai rămîn de determinat următoarele necunoscute:

Tabelul 1.1.15

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	120
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70=10	72	75	28	45	

În tabelul 1.1.08, cel mai mic număr din coloana întîi, exceptînd numărul 60, este 90, aflat în linia întîi. În poziţia corespunzătoare repartizăm cantitatea de 10 t din disponibilul de 120 t al primului expeditor. Avem deci $x_{11} = 10$, iar $x_{21} = 0$. Expeditorului 1 îi va rămîne disponibilă cantitatea de 120 — — 10 = 110 t. Tabelul 1.1.15 devine:

Tabelul 1.1.16

	1	2	3	4	5	
1	10	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	120—10=110
2	0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72	75	28	45	

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd pentru celelalte 4 coloane (2, 3, 4 și 5) la fel cum s-a procedat pentru coloana întîi, se obțin succesiv următoarele tabele:

Tabelul 1.1.17

	1	2	3	4	5	
1	10	72	x_{13}	x_{14}	x_{15}	120—10—72=38
2	0	0	x_{23}	x_{24}	x_{25}	110
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72—72=0	75	28	45	

Tabelul 1.1.18

	1	2	3	4	5	
1	10	72	0	x_{14}	x_{15}	120—10—72=38
2	0	0	75	x_{24}	x_{25}	110—75=35
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72—72=0	75—75=0	28	45	

Tabelul 1.1.19

	1	2	3	4	5	
1	10	72	0	28	x_{15}	120—10—72—28=10
2	0	0	75	0	x_{25}	110—75=35
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72—72=0	75—75=0	28—28=0	45	

Tabelul 1.1.20

	1	2	3	4	5	
1	10	72	0	28	10	120—10—72—28—10=0
2	0	0	75	0	35	110—75—35=0
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72—72=0	75—75=0	28—28=0	45—10—35=0	

Totalul tonelor-kilometri conform soluției inițiale obținute (tabelul 1.1.20) este:

$$(10 \times 90) + (70 \times 60) + (72 \times 120) + (75 \times 70) + (28 \times 80) + (10 \times 60) + (35 \times 90) = 24\,980 \text{ t/km.}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Procedeul elementului minim din tabel

Acest procedeu constă în repartizarea succesivă a cantităților necesare destinatarilor după criteriul elementului minim (al celei mai mici distanțe, respectiv al celui mai mic cost) din tabel.

În continuare vom arăta cum se aplică acest procedeu în cazul exemplului luat (tabelul 1.1.08). Conform celor enunțate se alege cel mai mic număr din tabelul menționat, care în cazul nostru este 60 și care corespunde distanței dintre expeditorul 1 și destinatarul 5. Repartizăm cantitatea de 45 t necesare destinatarului 5 din disponibilul de 120 t al expeditorului 1. Avem $x_{15} = 45$ și deci $x_{25} = 0$ și $x_{35} = 0$. Întrucît la aceeași distanță se găsește și expeditorul 3 față de destinatarul 1, care are nevoie de 80 t, i se va repartiza cantitatea de 70 t disponibilă la expeditorul 3. Deci $x_{31} = 70$, iar $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 0$. De unde rezultă că mai avem de determinat următoarele necunoscute:

Tabelul 1.1.21

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	45	120—45=75
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	0	110
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70=10	72	75	28	45—45=0	

În tabelul 1.1.08, cel mai mic număr după 60 este 70, care corespunde distanței de la expeditorul 2 la destinatarul 3. Din disponibilul de 110 t al expeditorului 2, destinatarului 3 i se repartizează întreaga cantitate necesară de 75 t, adică $x_{23} = 75$ și deci $x_{13} = 0$ ($x_{32} = 0$), și mai rămîn din disponibilul expeditorului 2, $110 - 75 = 35$ t.

În urma acestor calcule, tabelul 1.1.21 devine:

Tabelul 1.1.22

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	0	x_{11}	45	120—45=75
2	x_{21}	x_{22}	75	x_{21}	0	110—75=35
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70=10	72	75—75=0	28	45—45=0	

Scanned with OKEN Scanner

Dintre distanțele rămase, cea mai mică este 80 km și corespunde expeditorului 1 și destinatarului 4. Cantitatea de 28 t necesară destinatarului 4 va fi primită de la expeditorul 1, deci $x_{14} = 28$ și $x_{24} = 0$. Tabelul 1.1.22 devine :

Tabelul 1.1.23

	1	2	3	4	5	
1	x_{11}	x_{12}	0	28	45	120—45—28=47
2	x_{21}	x_{22}	75	0	0	110—75=35
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70=10	72	75—75=0	28—28=0	45—45=0	

În continuare, cel mai mic număr rămas este 90, care corespunde atît distanței dintre expeditorul 1 și destinatarul 1, cît și distanței dintre expeditorul 2 și destinatarul 5. În repartizarea cantităților rămase, aceasta din urmă nu va fi luată în considerare, destinatarul 5 fiind în întregime satisfăcut. Vom repartiza deci de la expeditorul 1 destinatarului 1 cantitatea de 10 t pe care o mai are de primit. Avem : $x_{11} = 10$ și deci $x_{21} = 0$.

În acest caz, tabelul 1.1.23 devine :

Tabelul 1.1.24

	1	2	3	4	5	
1	10	x_{12}	0	28	45	120—45—28—10=37
2	0	x_{22}	75	0	0	110—75=35
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72	75—75=0	28—28=0	45—45=0	

Cantitățile de 37 t și 35 t rămase disponibile la expeditorii 1 și 2 se repartizează destinatarului 2, singurul rămas nesatisfăcut. Tabelul cu soluția inițială este următorul :

Tabelul 1.1.25

	1	2	3	4	5	
1	10	37	0	28	45	120—45—28—10—37=0
2	0	35	75	0	0	110—75—35=0
3	70	0	0	0	0	70—70=0
	80—70—10=0	72—37—35=0	75—75=0	28—28=0	45—45=0	

Scanned with OKEN Scanner

Pentru această soluție totalul tonelor-kilometri este :

$$(10 \times 90) + (37 \times 120) + (28 \times 80) + (45 \times 60) + (35 \times \times 140) + (75 \times 70) + (70 \times 60) = 24\,630 \text{ t/km.}$$

★

Comparînd totalul tonelor-kilometri corespunzător soluțiilor obținute prin aplicarea celor 4 procedee, avem :

— pentru procedeul colțului nord-vest... 30 090 t/km ;
— pentru procedeul elementului minim pe linie... 29 200 t/km ;
— pentru procedeul elementului minim pe coloană... ... 24 980 t/km ;
— pentru procedeul elementului minim din tabel...24 630 t/km.

Se observă că cel mai bun rezultat pentru exemplul ales s-a obținut prin aplicarea procedeului elementului minim din tabel, iar cel mai nefavorabil a rezultat prin aplicarea procedeului colțului nord-vest. Rezultatul obținut pentru exemplul ales nu poate constitui, totuși, o concluzie în avantajul folosirii unuia sau altuia dintre procedee. În general însă, ultimele trei procedee conduc la rezultate mai bune.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al II-lea

DETERMINAREA SOLUȚIEI OPTIME PRIN METODA DISTRIBUTIVĂ

După determinarea unei soluții de bază inițiale cu ajutorul unuia dintre procedeele arătate sau cu ajutorul oricărui alt procedeu care duce la o soluție de bază nedegenerată, urmează verificarea optimalității acesteia. Dacă soluția obținută nu este cea optimă, se trece la îmbunătățirea ei succesivă pînă la găsirea soluției optime.

Pentru determinarea unei soluții optime există mai multe metode. Una dintre cele mai simple metode de aflare a unei astfel de soluții este *metoda distributivă*. Pentru înțelegerea acestei metode vom folosi un exemplu numeric convențional de repartiție a unui produs omogen.

Să presupunem că 4 fabrici de ciment, situate în Bacău, Brăila, București și Turda, trebuie să aprovizioneze cu acest produs 5 consumatori, situați în Blaj, Buzău, Cîmpina, Ploiești și Tecuci.

În tabelul 1.2.01 se dau cheltuielile unitare de transport (lei/vagon), cantitățile solicitate de fiecare consumator și cantită-

Tabelul 1.2.01

Fabrici \ Consumatori	Blaj 1	Buzău 2	Cîmpina 3	Ploiești 4	Tecuci 5	Cantitatea ce poate fi livrată (vagoane)
1 Bacău	330	168	216	207	137	40
2 Brăila	331	126	187	168	126	28
3 București	270	157	137	121	207	24
4 Turda	121	311	270	290	311	39
Cantitatea solicitată (vagoane)	15	30	25	43	18	131

Scanned with OKEN Scanner

țile ce pot fi livrate de fiecare fabrică. Se pune problema determinării unui plan de transport căruia să-i corespundă cheltuieli minime de transport.

Vom exemplifica metoda distributivă de determinare a planurilor optime de transport, alegînd soluția inițială după procedeul colțului nord-vest [1], arătat în § 1 al capitolului precedent. Folosind acest procedeu, se obține următoarea soluție de bază inițială:

Tabelul 1.2.02

	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5	23			28
3			2	22		24
4				21	18	39
	15	30	25	43	18	

Totalul cheltuielilor de transport corespunzător acestei soluții este de 28 705 lei.

Verificînd planul de transport, se constată că fiecare consumator primește întreaga cantitate de care are nevoie (suma pe fiecare coloană) și fiecare fabrică livrează întreaga cantitate disponibilă (suma pe fiecare linie). Căsuțele în care apar cantități se vor denumi *locuri ocupate*, iar celelalte căsuțe *locuri libere*.

După determinarea soluției de bază inițială, este necesar să verificăm dacă soluția obținută este sau nu optimă. Pentru aceasta trebuie să cercetăm dacă, schimbînd soluția găsită, prin includerea unor rute nefolosite inițial („locuri libere"), putem obține o soluție mai bună, adică dacă totalul cheltuielilor de transport se poate reduce.

De pildă, să cercetăm cum se modifică totalul cheltuielilor de transport în cazul în care căsuța (1, 3 — linia întîi, coloana a treia) devine „loc ocupat". Adică, dacă în planul de transport inițial (tabelul 1.2.02) includem și ruta Bacău—Cîmpina. Vom considera $x_{13} = 1$, adică consumatorul din Cîmpina urmează să primească o unitate (1 000 t) din Bacău. În acest caz, pentru a nu se modifica suma pe linii și pe coloane, scădem o unitate

[1] Soluția de bază inițială poate fi determinată după oricare dintre procedeele cunoscute.

din căsuță (2, 3), adăugăm o unitate în căsuța (2, 2) și scădem o unitate din căsuța (1, 2).

In acest caz, tabelul 1.2.02 devine :

Tabelul 1.2.02 a

	1	2	3	4	5	
1	15	25 — 1	0 + 1			40
2		5 + 1	23 — 1			28
3			2	22		24
4				21	18	39
	15	30	25	43	18	

Modificarea totalului cheltuielilor de transport în urma acestei mișcări, prin ocuparea căsuței (1, 3), se va nota cu d_{13} și se poate calcula ușor pe baza tabelului costurilor unitare (vezi tabelul 1.2.01) :

$$d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13.$$

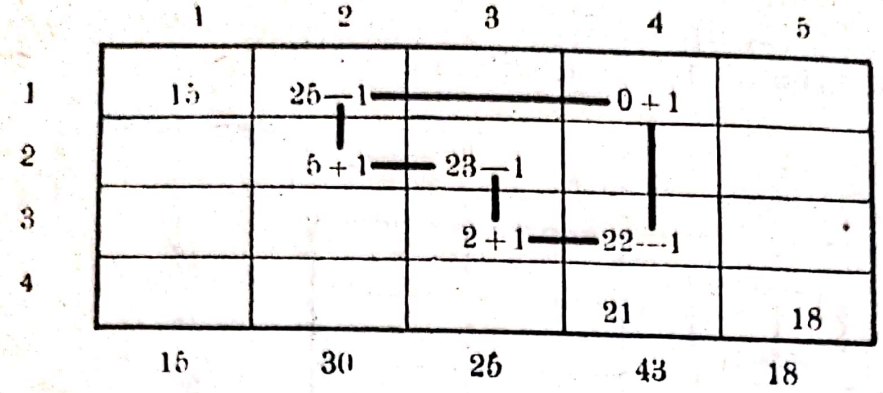
De aici rezultă că în urma acestei modificări cheltuielile de transport se micșorează cu 13 lei pentru fiecare unitate transportată.

În același fel se cercetează toate „locurile libere", și anume :

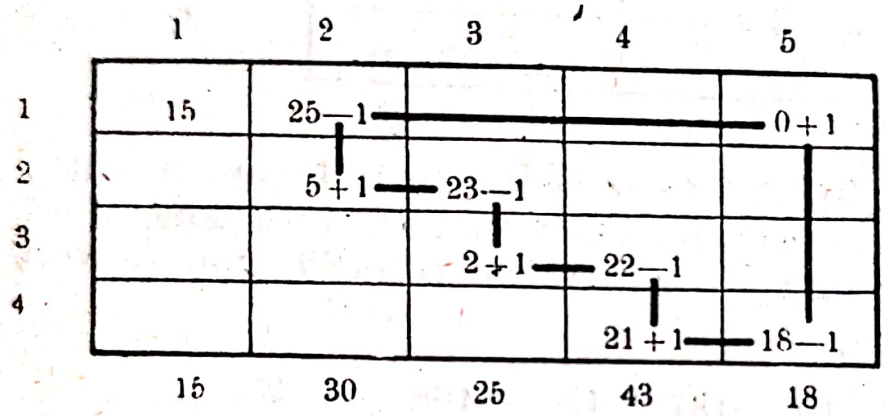
Începînd cu fiecare „loc liber", se merge în linie închisă, păsind numai în „locurile ocupate" (cu excepția ultimului pas). De la fiecare loc ocupat la care se ajunge se cotește numai în unghi drept.

Se vede că mișcările care trebuie făcute sînt asemănătoare cu mișcările turnului în jocul de șah, adică fiecare mutare trebuie să fie numai orizontală sau verticală. Spre deosebire însă de jocul de șah, se poate păși numai în locurile ocupate. Dacă soluția de la care se pleacă este o soluție de bază nedegenerată (care conține exact $m + n - 1$ locuri ocupate, adică în cazul nostru $4 + 5 - 1 = 8$), iar mutările sînt executate corect, pentru fiecare loc liber se poate merge pe un singur drum. Un astfel de drum închis va fi numit *ciclu*. Mai jos sînt arătate ciclurile ce se formează pentru toate „locurile libere" din tabelul 1.2.02 :

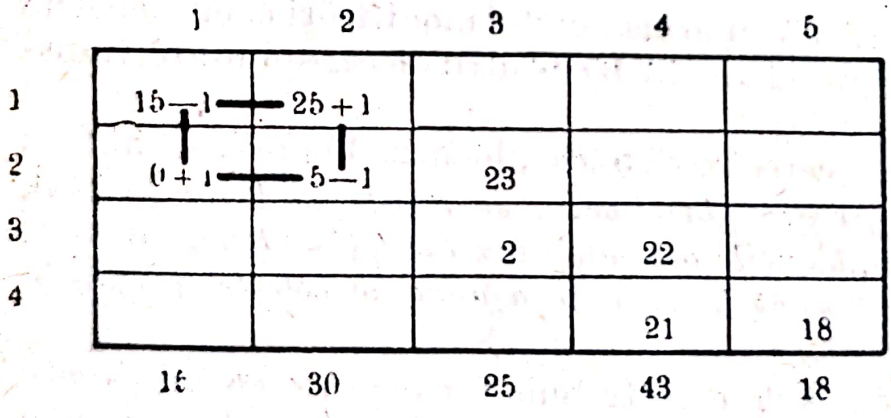
Tabelul 1.2.02 b



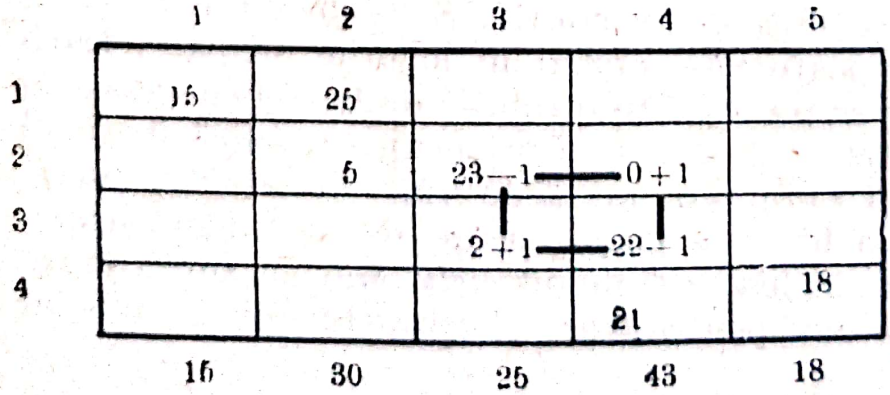
Tabelul 1 2.02 c



Tabelul 1.2.02 d



Tabelul 1.2.02 e



Tabelul 1.2.02 f

	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5	23—1		0+1	28
3			2+1	22—1		24
4				21+1	18—1	39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.02 g

	1	2	3	4	5	
1	15—1	25+1				40
2		5—1	23+1			28
3	0+1		2—1	22		24
4				21	18	39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.02 h

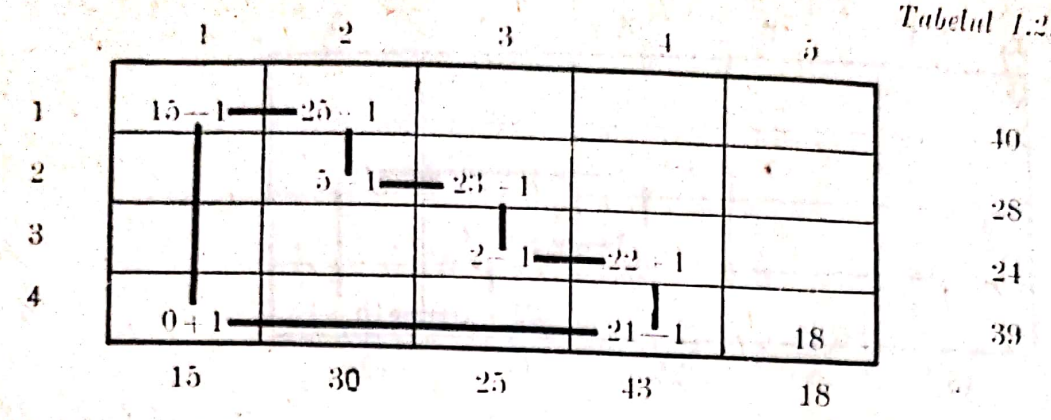
	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5—1	23+1			28
3		0+1	2—1	22		24
4				21	18	39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.02 i

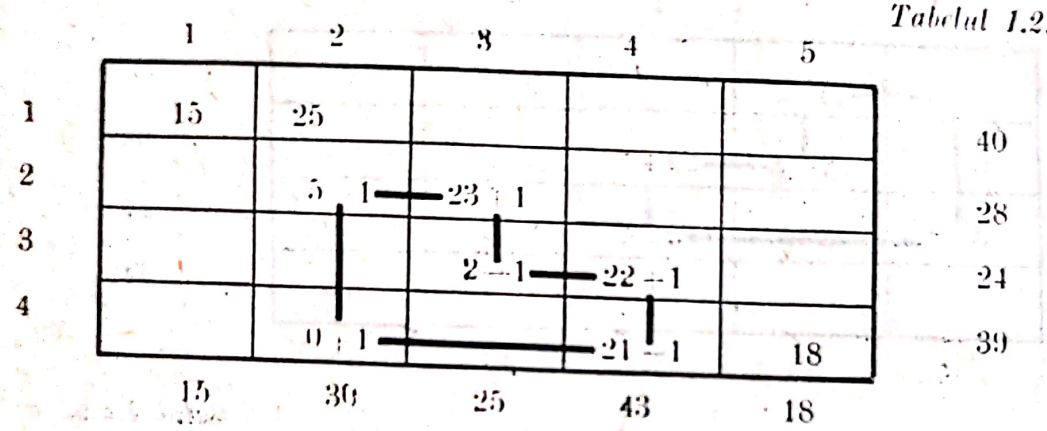
	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5	23			28
3			2	22—1	0+1	24
4				21+1	18—1	39
	15	30	25	43	18	

Scanned with OKEN Scanner

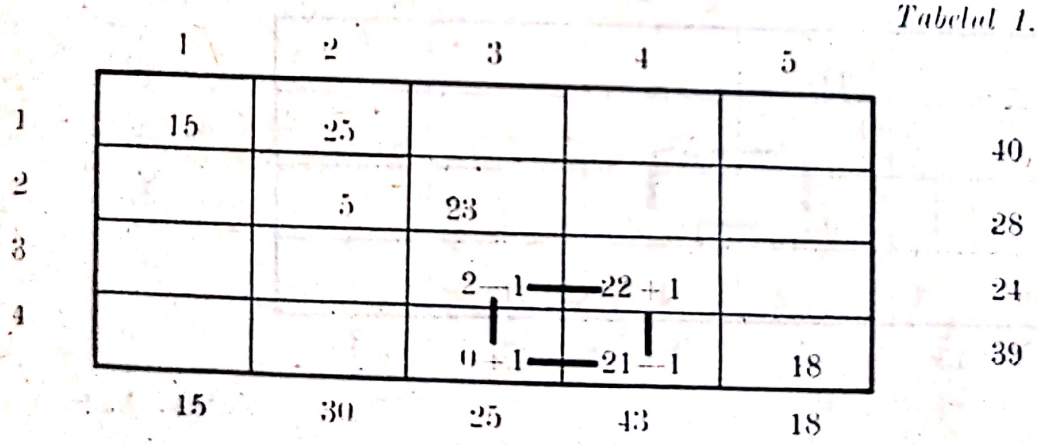
Tabelul 1.2.02 j



Tabelul 1.2.02 k



Tabelul 1.2.02 l



Calculînd modificările cheltuielilor de transport corespunzătoare mişcărilor din tabelele 1.2.02 *a*—1.2.02 *l* avem :

pentru tabelul 1.2.02 *a* : $d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13$;

pentru tabelul 1.2.02 *b* : $d_{14} = 207 - 121 + 137 - 187 + 126 - 168 = -6$;

pentru tabelul 1.2.02 *c* : $d_{15} = 137 - 168 + 126 - 187 + 137 - 121 + 290 - 311 = -97$;

pentru tabelul 1.2.02 d: $d_{21} = 331 - 330 + 168 - 126 = 43$;
„ „ 1.2.02 e: $d_{24} = 168 - 187 + 137 - 121 = -3$;
„ „ 1.2.02 f: $d_{25} = 126 - 187 + 137 - 121 + 290 - 311 = -66$;
pentru tabelul 1.2.02 g: $d_{31} = 270 - 137 + 187 - 126 + 168 - 330 = 32$;
pentru tabelul 1.2.02 h: $d_{32} = 157 - 126 + 187 - 137 = 81$;
„ „ 1.2.02 i: $d_{35} = 207 - 121 + 290 - 311 = 65$;
„ „ 1.2.02 j: $d_{41} = 121 - 330 + 168 - 126 + 187 - 137 + 121 - 290 = -286$;
pentru tabelul 1.2.02 k: $d_{42} = 311 - 126 + 187 - 137 + 121 - 290 = 66$;
pentru tabelul 1.2.02 l: $d_{43} = 276 - 137 + 121 - 290 = -36$.

Se analizează apoi modificările care fac ca totalul cheltuielilor de transport să se diminueze. Acest lucru se obține numai pentru valorile negative ale variațiilor d, care în cazul nostru sînt în număr de 7, și anume: $d_{13} = -13$, $d_{14} = -6$, $d_{15} = -97$, $d_{24} = -3$, $d_{25} = -66$, $d_{41} = -286$ și $d_{43} = -36$. În general, nu este necesar să se calculeze toate diferențele, deoarece este suficient să se găsească o singură valoare negativă, care indică posibilitatea îmbunătățirii soluției. În cazul cînd calculăm toate valorile d, așa cum s-a făcut mai sus, este recomandabilă alegerea celei mai mici valori negative (adică a celei mai mari valori absolute).

Pentru exemplul luat, diferența negativă cea mai mare în valoare absolută este $d_{41} = -286$, care corespunde tabelului 1.2.02 j. Rezultă că prin transferarea unei unități de-a lungul ciclului din tabelul amintit, totalul cheltuielilor de transport se reduce cu 286 de lei. Reducerea cheltuielilor de transport va fi cu atît mai mare, cu cît numărul unităților transferate va fi mai mare. Deci, în continuare, vom analiza tabelul 1.2.02 j pentru a vedea care este cel mai mare număr de unități ce pot fi transferate.

Pentru a nu se schimba totalurile pe linii și pe coloane, cantitatea ce urmează a fi plasată în căsuța (4, 1) trebuie scăzută din cantitatea din căsuța (1, 1), adunată la cantitatea din căsuța (1, 2), scăzută din cantitatea din căsuța (2,2), adunată la cantitatea din căsuța (2, 3), scăzută din cantitatea din căsuța (3, 3), adunată la cantitatea din căsuța (3, 4) și, în fine, scăzută din cantitatea din căsuța (4, 4).

Ciclul din tabelul 1.2.02 j, corespunzător căsuței (4, 1) care trebuie ocupată, este arătat în fig. 1.

Scanned with OKEN Scanner

Cantitatea ce urmează a fi transferată poate fi determinată în felul următor: căsuţele ciclului se numerotează, începînd cu căsuţa liberă, în sensul rotirii acelor de ceasornic (sau în sens invers) şi se alege cantitatea cea mai mică din căsuţele

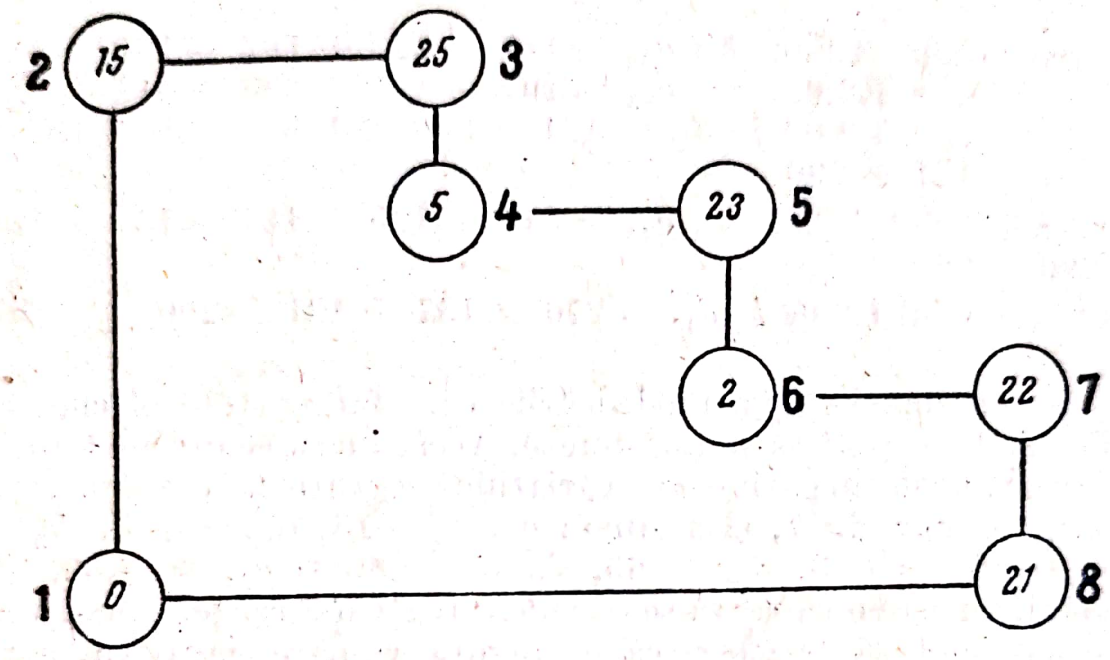


Fig. 1

numerotate cu numere pare. Această cantitate se scade din cantităţile din căsuţele cu numere pare şi se adună la cantităţile din căsuţele cu numere impare.

În cazul nostru, cantitatea ce poate fi transferată este de 2 unităţi; ea este determinată de cantitatea din căsuţa (2, 3).

Se transferă deci 2 unităţi în căsuţa (4, 1), iar pentru a nu se modifica suma pe linii şi pe coloane se scad 2 unităţi din cantităţile din căsuţele (1, 1), (2, 2), (3, 3) şi (4, 4), urmînd ca aceeaşi cantitate să fie adunată la cantităţile din căsuţele (1, 2), (2, 3) şi (3, 4).

În urma acestor modificări se obţine soluţia: (vezi tabelul 1.2.03).

Cheltuielile corespunzătoare sînt:

$(13 \times 330) + (27 \times 168) + (3 \times 126) + (25 \times 187) + (24 \times 121) + (19 \times 290) + (18 \times 311) + (2 \times 121) = 28\,133$ de lei. Deci prin trecerea la această nouă soluţie, cheltuielile de transport se reduc cu $28\,705 - 28\,133 = 572$ lei, rezultat de altfel aşteptat, deoarece, după cum s-a arătat, prin transferarea

Tabelul 1.2.03

	1	2	3	4	5	
1	13	27				40
2		3	25			28
3				24		24
4	2			19	18	39
	15	30	25	43	18	

unei unități cheltuielile se reduceau cu 286 de lei, deci prin transferarea a 2 unități reducerea este de $2 \times 286 = 572$ de lei.

Făcînd suma pe linii și pe coloane în tabelul 1.2.03, se constată că restricțiile în ceea ce privește cantitățile disponibile și cele necesare au rămas satisfăcute.

După obținerea acestei noi soluții trebuie să verificăm iarăși dacă aceasta este sau nu optimă. În acest scop se reiau calculele precedente, astfel:

Tabelul 1.2.03 a

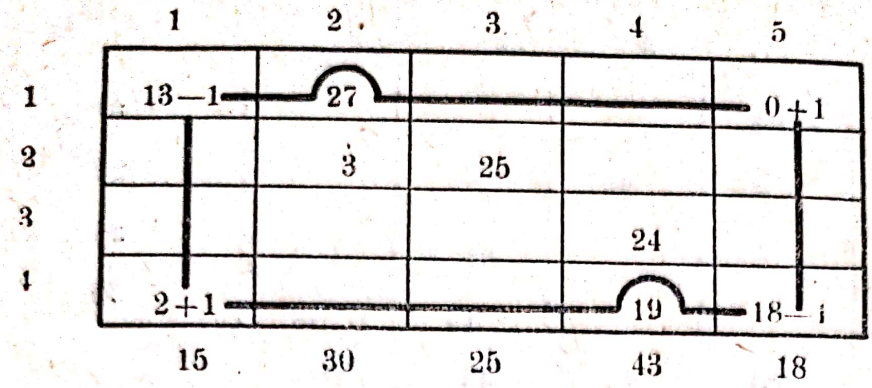
	1	2	3	4	5	
1	13	27 — 1	0 + 1			40
2		3 + 1	25 — 1			28
3				24		24
4	2			19	18	39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.03 b

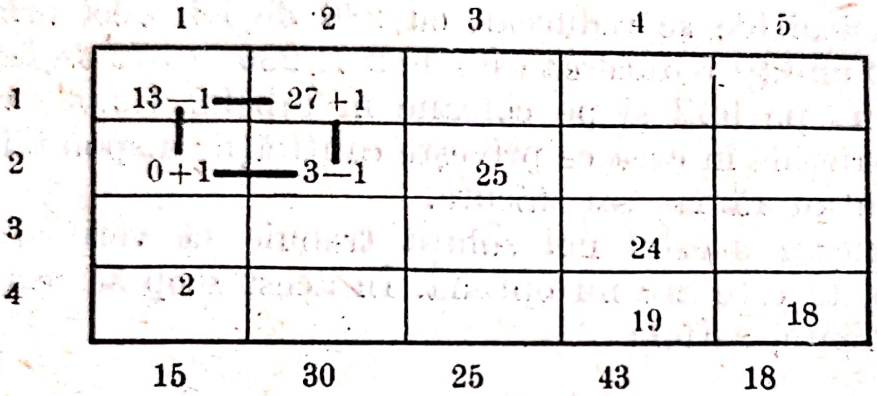
	1	2	3	4	5	
1	13 — 1	27		0 + 1		40
2		3	25			28
3				24		24
4	2 + 1			19 — 1	18	39
	15	30	25	43	18	

Scanned with OKEN Scanner

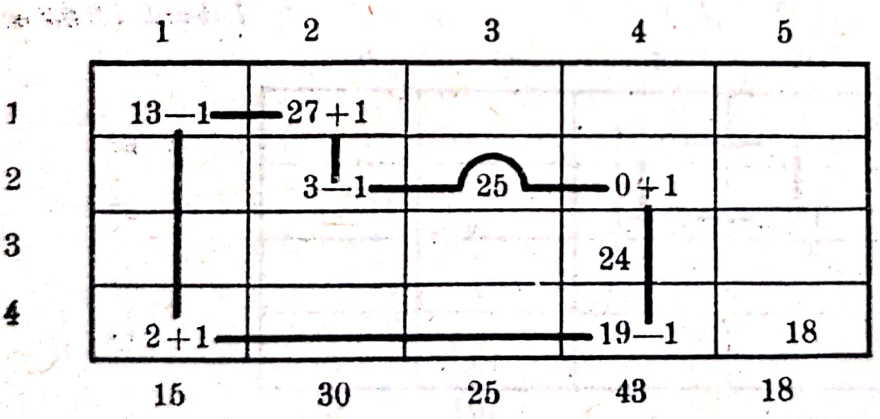
Tabelul 1.2.03 c



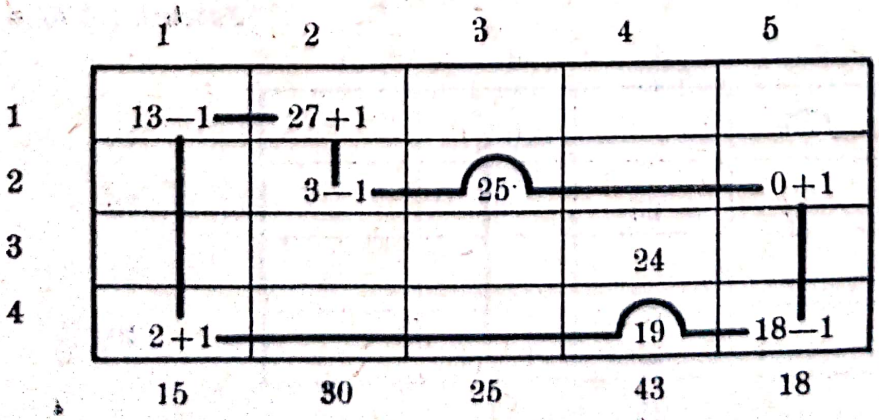
Tabelul 1.2.03 d



Tabelul 1.2.03 e

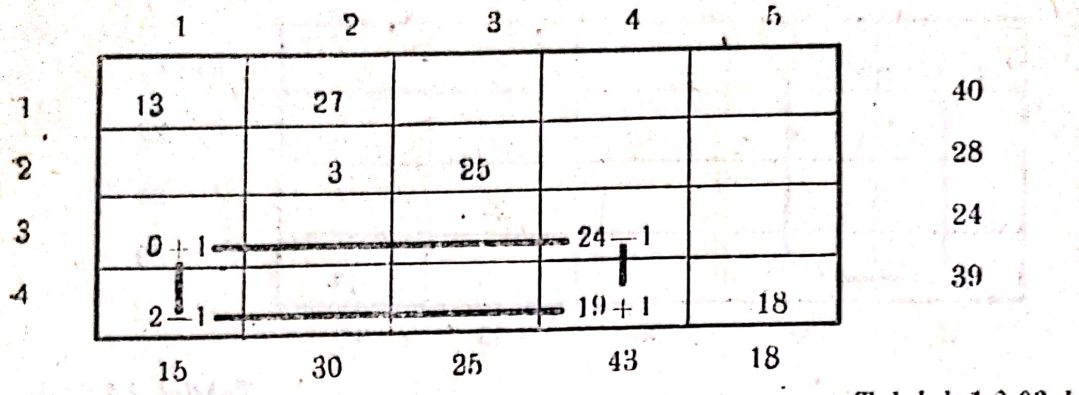


Tabelul 1.2 03 f

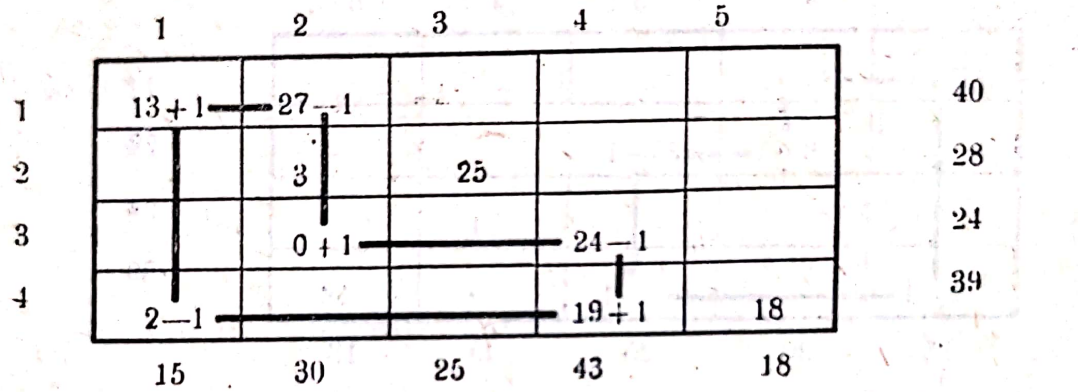


Scanned with OKEN Scanner

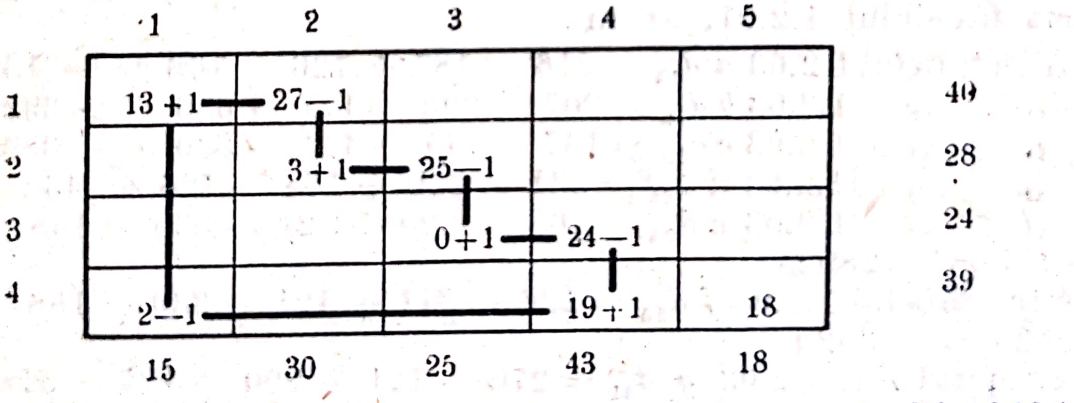
Tabelul 1.2.03 g



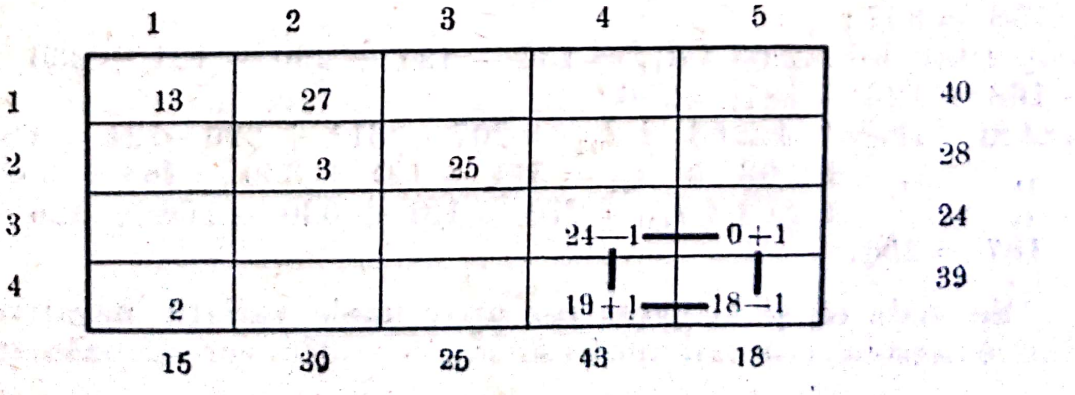
Tabelul 1.2.03 h



Tabelul 1.2.03 i

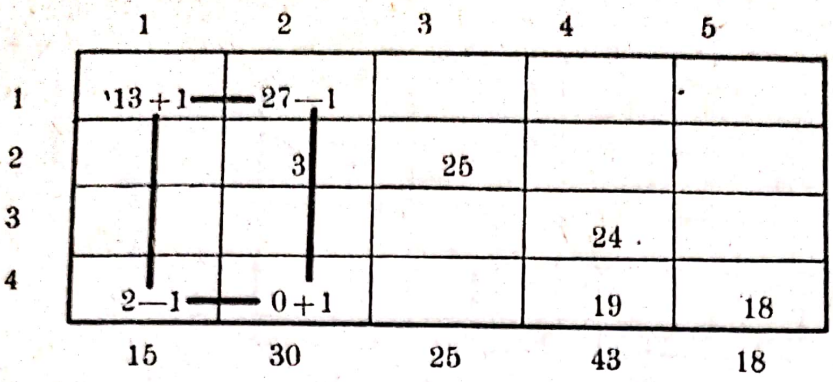


Tabelul 1.2.03 j

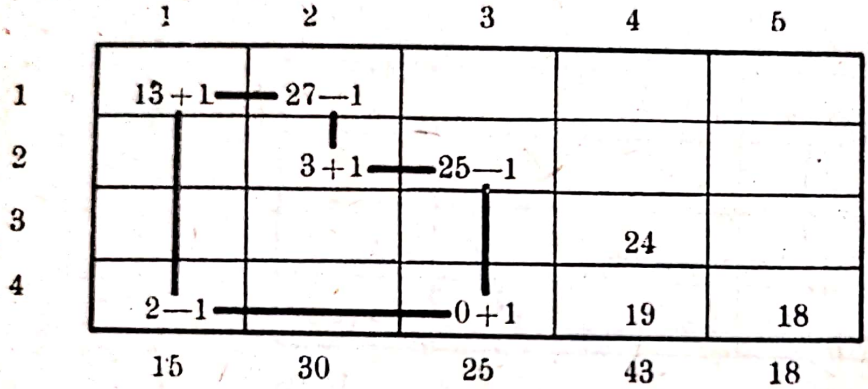


Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.2.03 k



Tabelul 1.2.03 l



Calculînd variațiile totalului cheltuielilor de transport pe baza tabelului 1.2.01, avem:

pentru tabelul 1.2.03 *a* $d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13$;
„ „ 1.2.03 *b* $d_{14} = 207 - 290 + 121 - 330 = -292$;
„ „ 1.2.03 *c* $d_{15} = 137 - 311 + 121 - 330 = -383$;
„ „ 1.2.03 *d* $d_{21} = 331 - 330 + 168 - 126 = 43$;
„ „ 1.2.03 *e* $d_{24} = 168 - 290 + 121 - 330 + 168 - 126 = -289$;
pentru tabelul 1.2.03 *f* $d_{25} = 126 - 311 + 121 - 330 + 168 - 126 = -352$;
pentru tabelul 1.2.03 *g* $d_{31} = 270 - 121 + 290 - 121 = 318$;
„ „ 1.2.03 *h* $d_{32} = 157 - 121 + 290 - 121 + 330 - 168 = 367$;
pentru tabelul 1.2.03 *i* $d_{33} = 137 - 121 + 290 - 121 + 330 - 168 + 126 - 187 = 286$;
pentru tabelul 1.2.03 *j* $d_{35} = 207 - 311 + 290 - 121 = 65$;
„ „ 1.2.03 *k* $d_{42} = 311 - 121 + 330 - 168 = 352$;
„ „ 1.2.03 *l* $d_{43} = 270 - 121 + 330 - 168 + 126 - 187 = 250$.

Se vede că și în acest caz apar unele variații negative. Dintre acestea, cea mai mică este $d_{15} = -383$, corespunzătoare

tabelului 1.2.03 *c*. Cea mai mare cantitate ce se poate transfera și care se determină așa cum s-a arătat mai sus este 13 și corespunde căsuței (1, 1). Vom transfera deci 13 unități în căsuța (4, 1), iar pentru ca suma pe linii și pe coloane să rămînă aceeași vom scădea 13 unități din căsuțele (1, 1) și (4, 5), iar în căsuța (1, 5) vom adăuga această cantitate. În acest mod vom obține soluția :

Tabelul 1.2.04

	1	2	3	4	5	
1		27			13	40
2		3	25			28
3				24		24
4	15			19	5	39
	15	30	25	43	18	

Cheltuielile corespunzătoare în acest caz vor fi :

$$(27 \times 168) + (13 \times 137) + (3 \times 126) + (25 \times 187) + (24 \times$$

$$\times 121) + (15 \times 121) + (19 \times 290) + (5 \times 311) = 23\,154 \text{ de lei.}$$

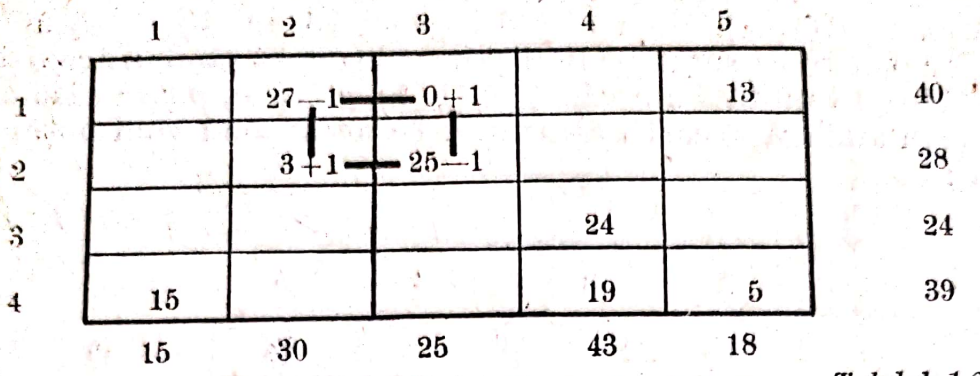
După cum era de așteptat, prin noua soluție cheltuielile de transport s-au redus cu $13 \times 383 = 4\,979$ de lei față de soluția precedentă.

Pentru a verifica dacă soluția dată de tabelul 1.2.04 este optimă, reluăm calculele :

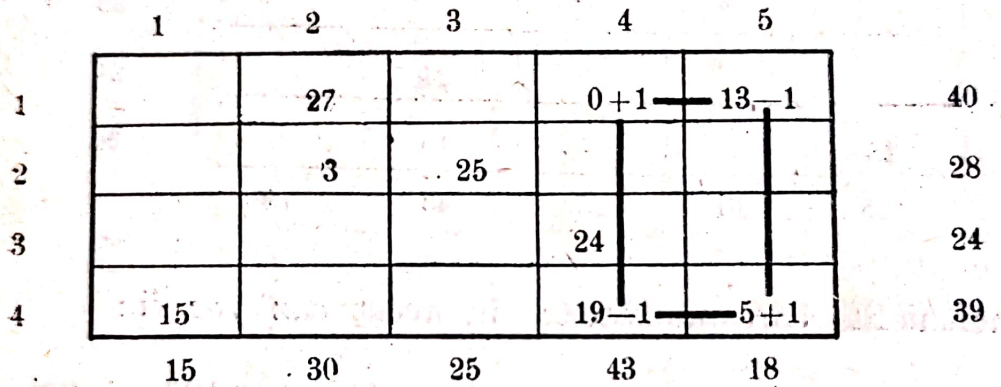
Tabelul 1.2.04 a

	1	2	3	4	5	
1	0 + 1	27			13 − 1	40
2		3	25			28
3				24		24
4	15 − 1			19	5 + 1	39
	15	30	25	43	18	

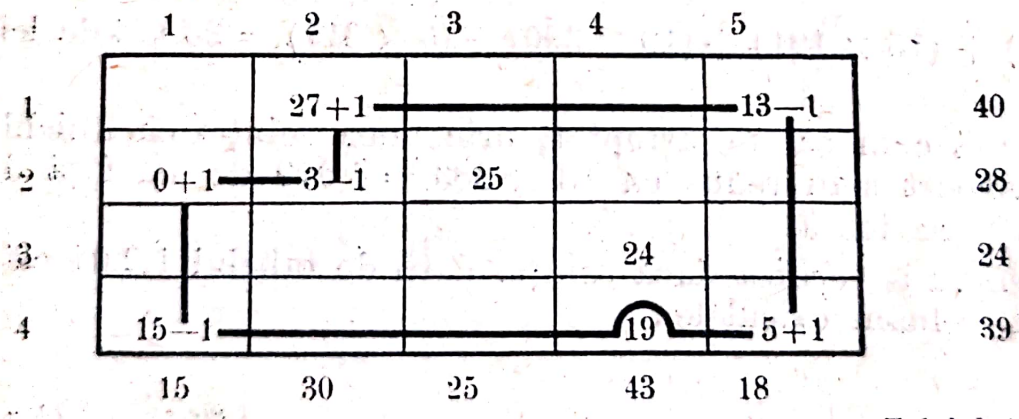
Tabelul 1.2.04 b



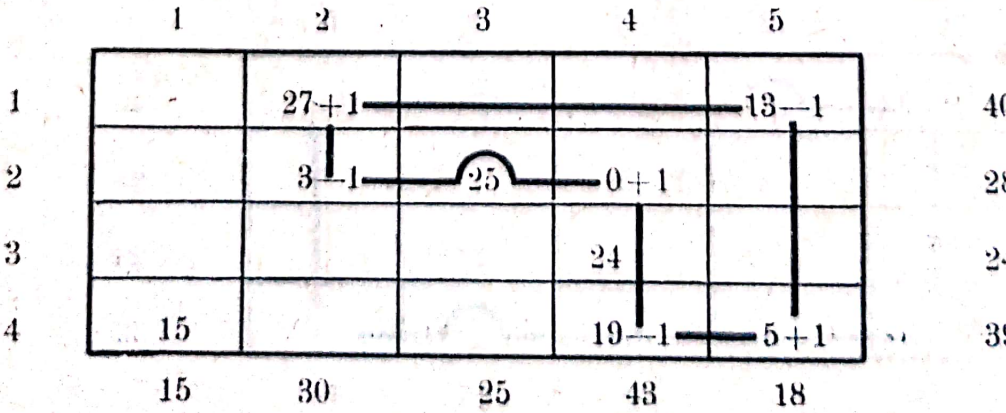
Tabelul 1.2.04 c



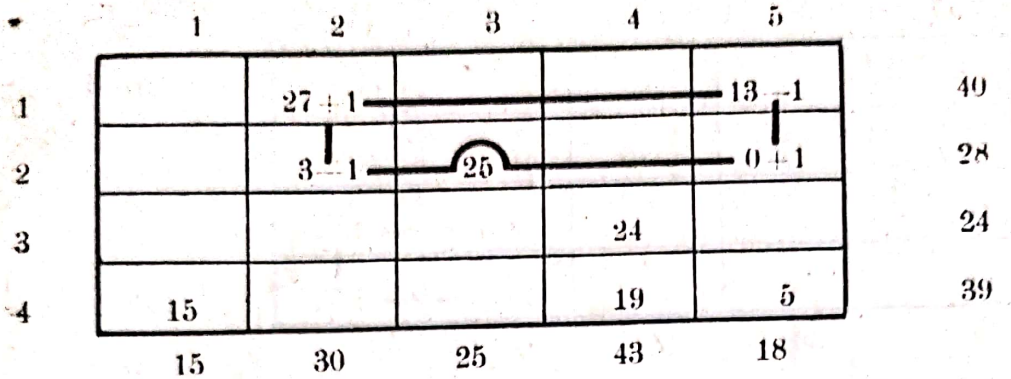
Tabelul 1.2.04 d



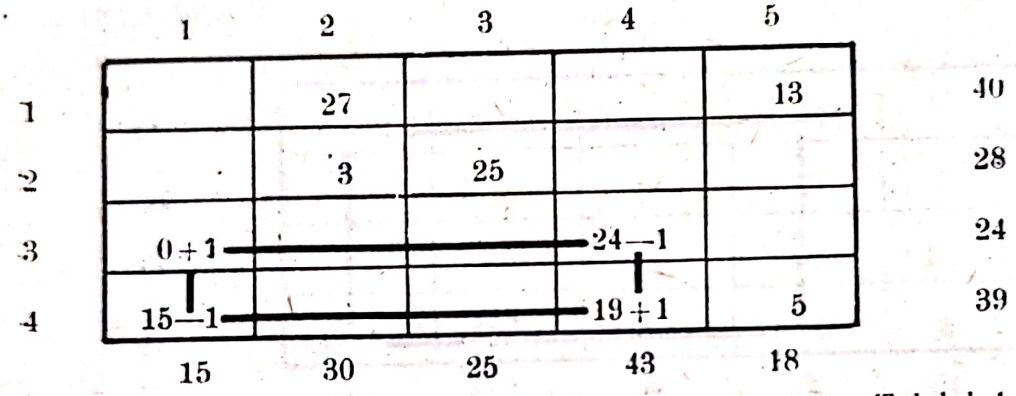
Tabelul 1.2.04 e



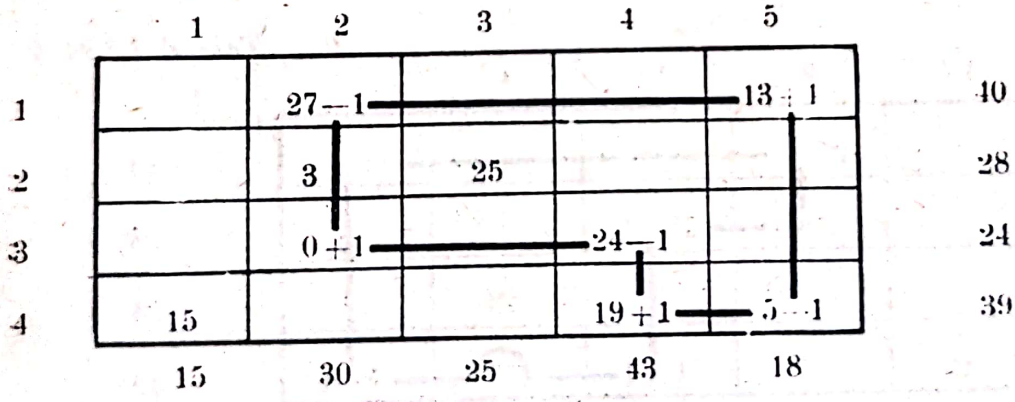
Tabelul 1.2.04 f



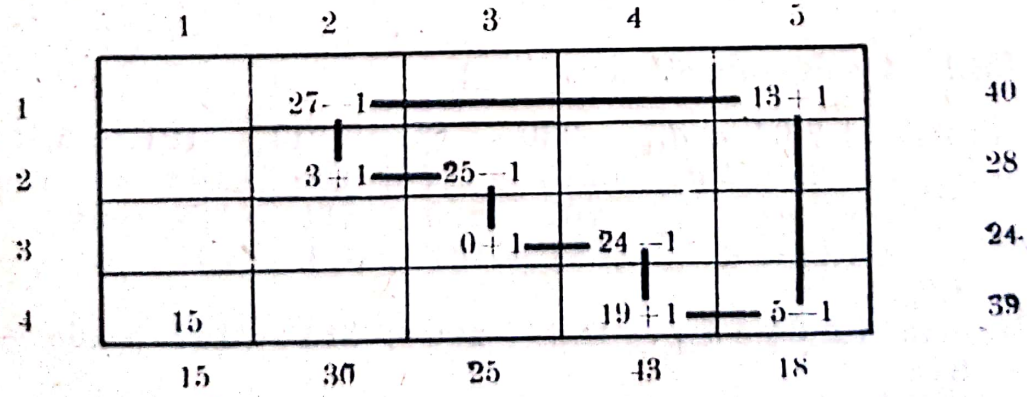
Tabelul 1.2.04 g



Tabelul 1.2.04 h

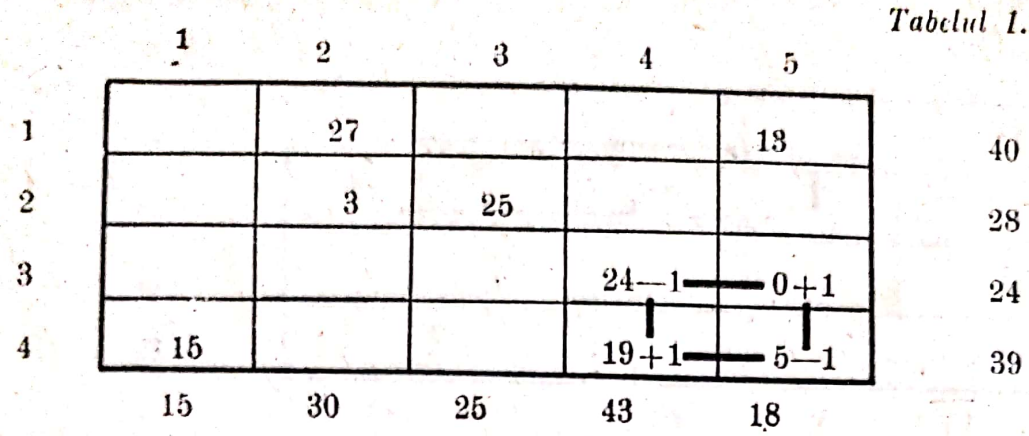


Tabelul 1.2.01 i

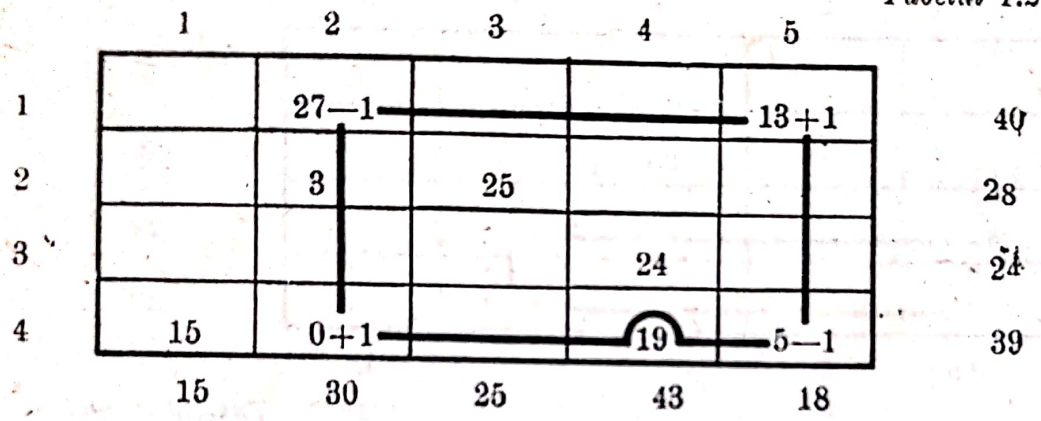


Scanned with OKEN Scanner

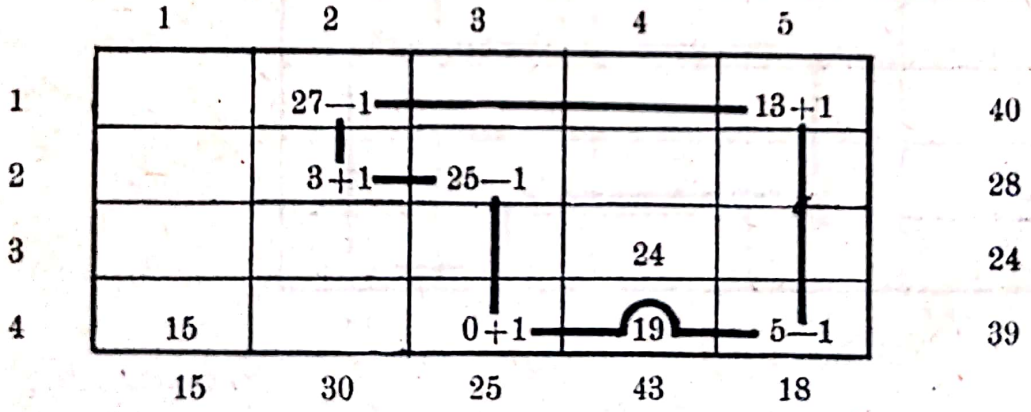
Tabelul 1.2.04 j



Tabelul 1.2.04 k



Tabelul 1.2.04 l



Valorile d corespunzătoare sînt:

Pentru tabelul 1.2.04 *a* $d_{11} = 330 - 137 + 311 - 121 = 383$;
" " 1.2.04 *b* $d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13$;
" " 1.2.04 *c* $d_{14} = 207 - 290 + 311 - 137 = 91$;
" " 1.2.04 *d* $d_{21} = 331 - 121 + 311 - 137 + 168 - 126 = 42$;
Pentru tabelul 1.2.04 *e* $d_{24} = 168 - 290 + 311 - 137 + 168 - 126 = 94$;

Scanned with OKEN Scanner

Pentru tabelul 1.2.04 *f* $d_{25} = 126 - 137 + 168 - 126 = 31$;
„ „ 1.2.04 *g* $d_{31} = 270 - 121 + 290 - 121 = 318$;
„ „ 1.2.04 *h* $d_{32} = 157 - 168 + 137 - 311 + 290 - 121 = -16$;
Pentru tabelul 1.2.04 *i* $d_{33} = 137 - 187 + 126 - 168 + 137 - 311 + 290 - 121 = -97$;
Pentru tabelul 1.2.04 *j* $d_{35} = 207 - 311 + 290 - 121 = 65$;
„ „ 1.2.04 *k* $d_{42} = 311 - 168 + 137 - 311 = -31$;
„ „ 1.2.04 *l* $d_{43} = 270 - 311 + 137 - 168 + 126 - 187 = -133$.

Dintre cele 5 valori negative ale lui *d*, cea mai mică este — 133 și corespunde tabelului 1.2.04 *l*. Cantitatea maximă ce poate fi transferată este 5.

Efectuînd modificările corespunzătoare, se obține soluția :

Tabelul 1.2.05

	1	2	3	4	5	
1		22			18	40
2		8	20			28
3				24		24
4	15		5	19		39
	15	30	25	43	18	

Cheltuielile corespunzătoare sînt :

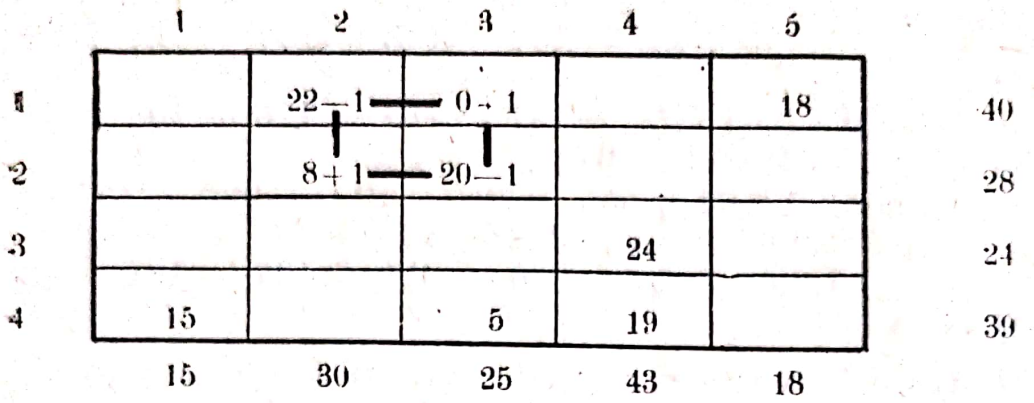
$(12 \times 168) + (18 \times 137) + (8 \times 126) + (20 \times 187) + (24 \times 121) + (15 \times 121) + (5 \times 270) + (19 \times 290) = 22\,489$ lei.

Trecem apoi la verificarea optimalității soluției obținute în tabelul 1.2.05, astfel :

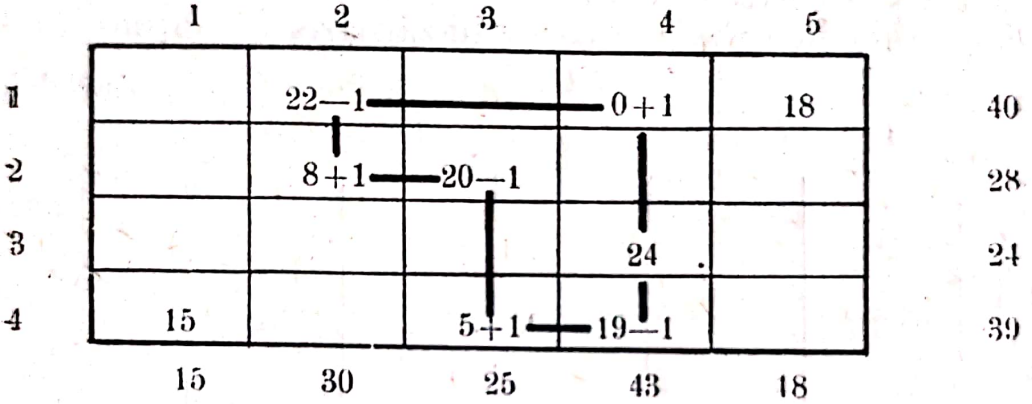
Tabelul 1.2.05 a

	1	2	3	4	5	
1	0 + 1	22 — 1			18	40
2		8 + 1	20 — 1			28
3				24		24
4	15 — 1		5 + 1	19		39
	15	30	25	43	18	

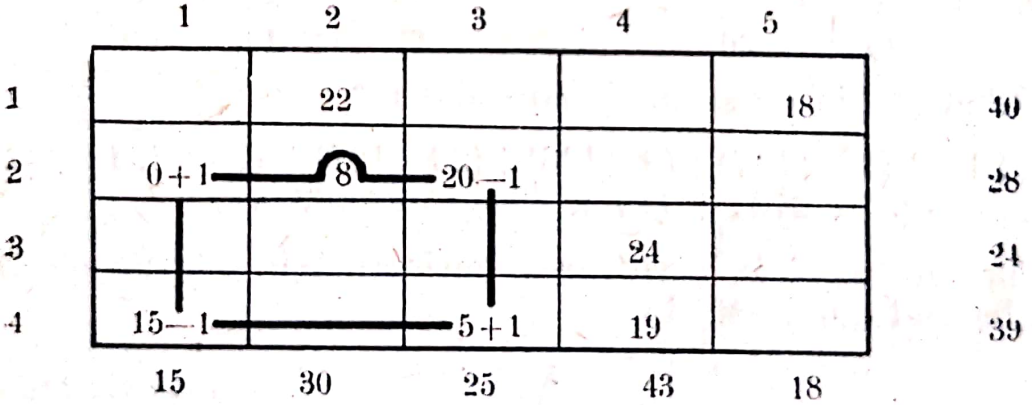
Tabelul 1.2.05 b



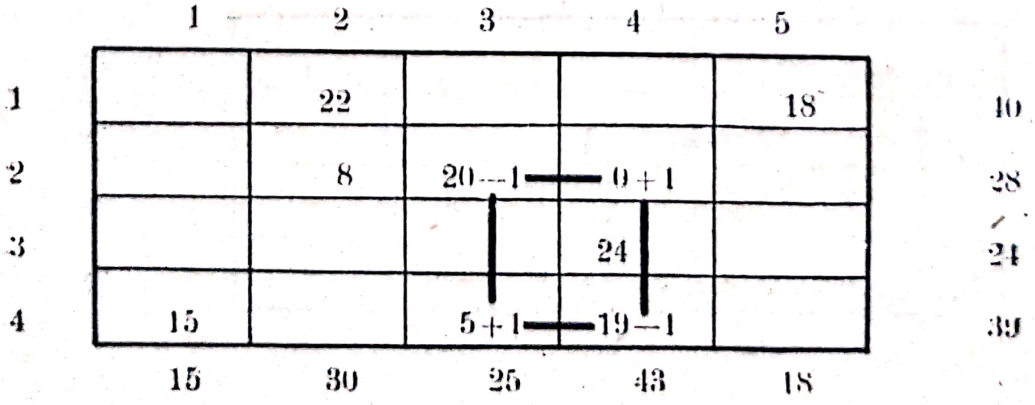
Tabelul 1.2.05 c



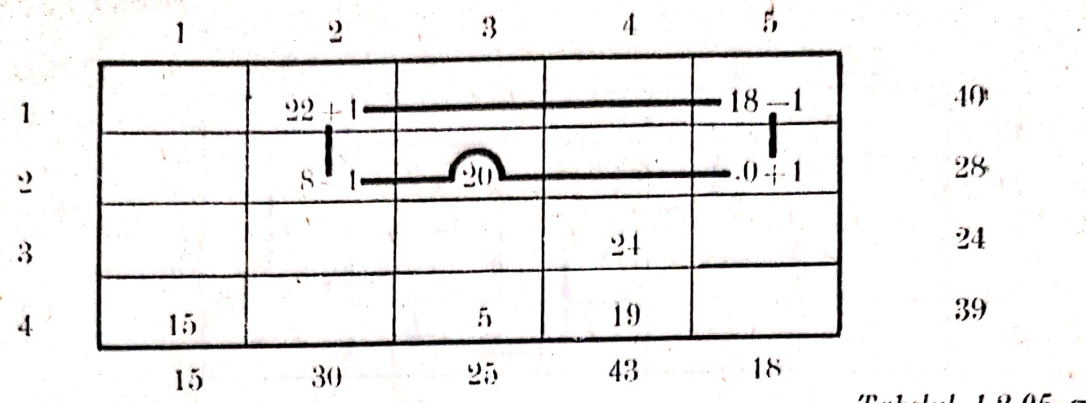
Tabelul 1.2.05 d



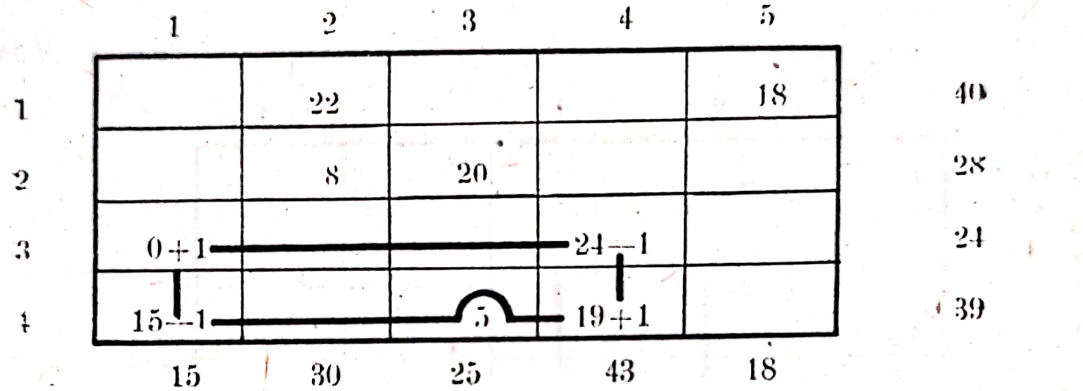
Tabelul 1.2.05 e



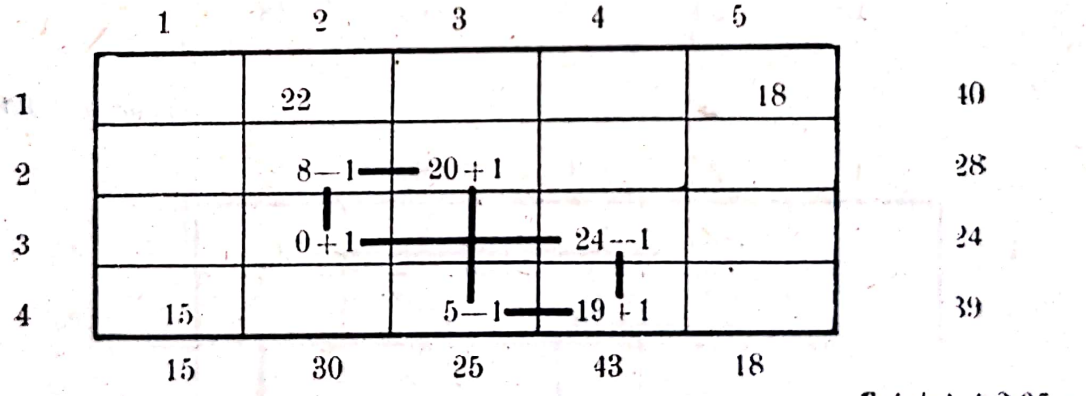
Tabelul 1.2.05 f



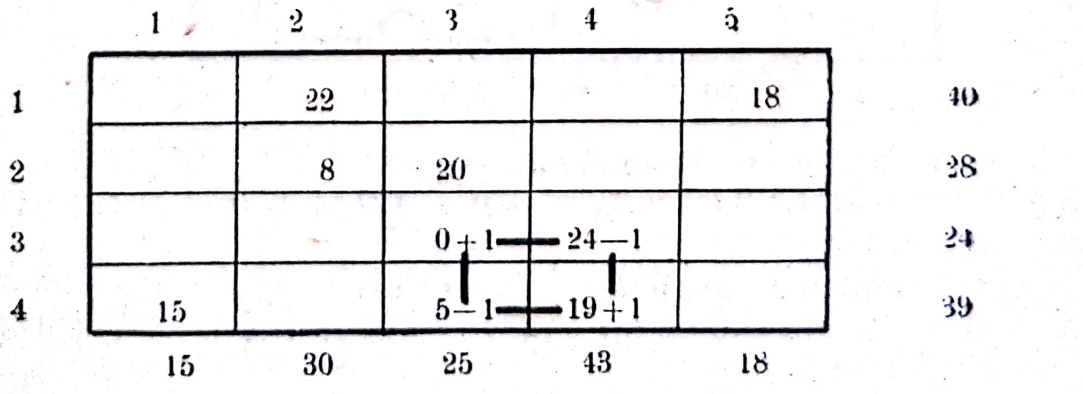
Tabelul 1.2.05 g



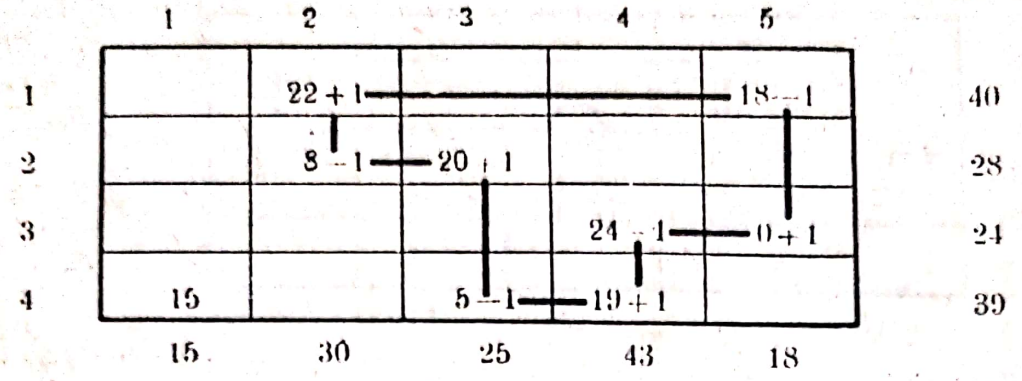
Tabelul 1.2.05 h



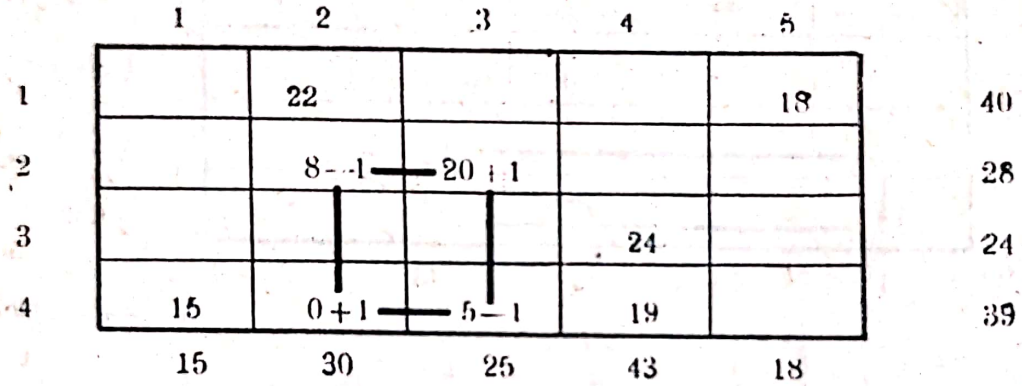
Tabelul 1.2.05 i



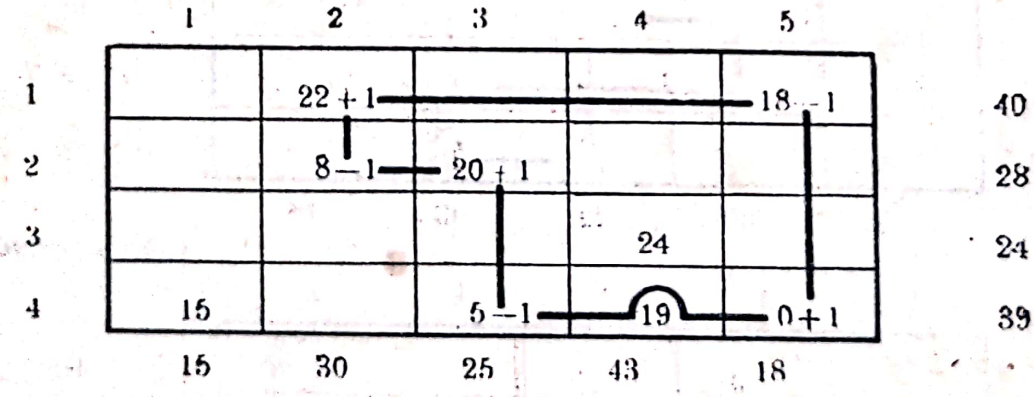
Tabelul 1.2.05 j



Tabelul 1.2.05 k



Tabelul 1.2.05 l



Valorile d corespunzătoare sînt:
pentru tabelul 1.2.05 *a* $d_{11} = 330 - 121 + 270 - 187 + 126 - 168 = 250$;
pentru tabelul 1.2.05 *b* $d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13$;
„ „ 1.2.05 *c* $d_{14} = 207 - 290 + 270 - 187 + 126 - 168 = -42$;

pentru tabelul 1.2.05 *d* $d_{21} = 331 - 187 + 270 - 121 = 293$;
„ „ 1.2.05 *e* $d_{24} = 168 - 290 + 270 - 187 = -39$;
„ „ 1.2.05 *f* $d_{25} = 126 - 137 + 168 - 126 = -31$;
„ „ 1.2.05 *g* $d_{31} = 270 - 121 + 290 - 121 = 318$;
„ „ 1.2.05 *h* $d_{32} = 157 - 126 + 187 - 270 + 290 - 121 = 117$;
pentru tabelul 1.2.05 *i* $d_{33} = 137 - 270 + 290 - 121 = 36$;
„ „ 1.2.05 *j* $d_{35} = 207 - 137 + 168 - 126 + 187 - 270 + 290 - 121 = 198$;
pentru tabelul 1.2.05 *k* $d_{42} = 311 - 126 + 187 - 270 = 102$;
„ „ 1.2.05 *l* $d_{45} = 311 - 137 + 168 - 126 + 187 - 270 = 133$.

Dintre cele 3 valori negative ale lui *d* cea mai mică este — 42 şi corespunde tabelului 1.2.05 *c*. Cantitatea ce poate fi transferată, după cum rezultă din tabel, este 19. Efectuînd modificările necesare, obţinem soluţia :

Tabelul 1.2.06

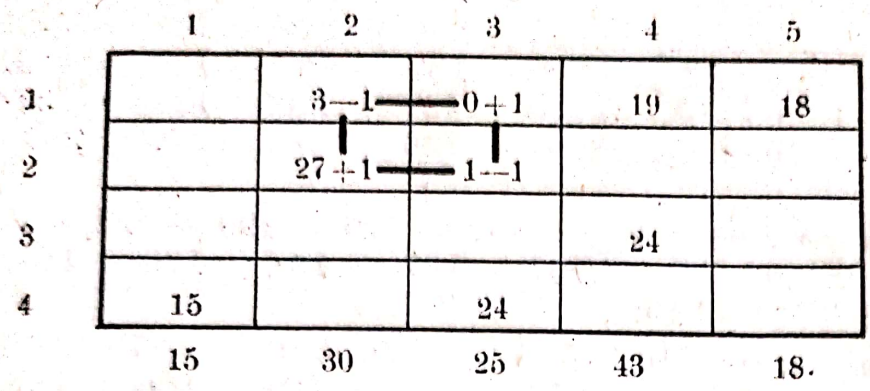
	1	2	3	4	5	
1		3		19	18	40
2		27	1			28
3				24		24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

Cheltuielile de transport corespunzătoare sînt de 21 691 de lei. Să verificăm dacă soluţia găsită este optimă :

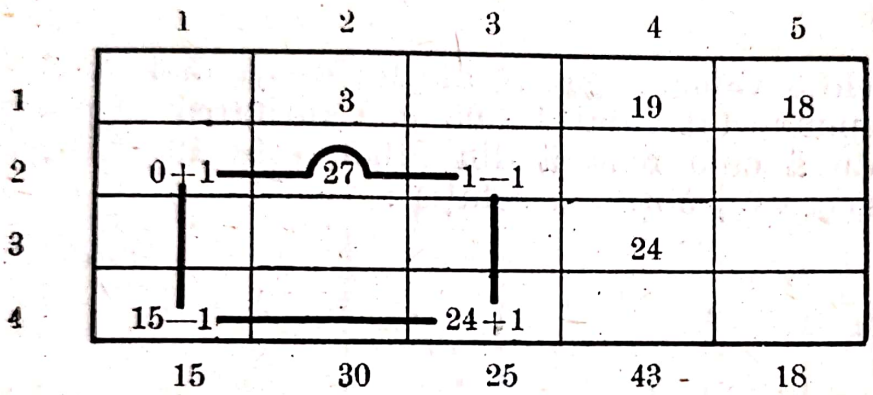
Tabelul 1.2.06 a

	1	2	3	4	5	
1	0 + 1 — 3 — 1			19	18	40
2		27 + 1 — 1 — 1				28
3				24		24
4	15 — 1		24 + 1			39
	15	30	25	43	18	

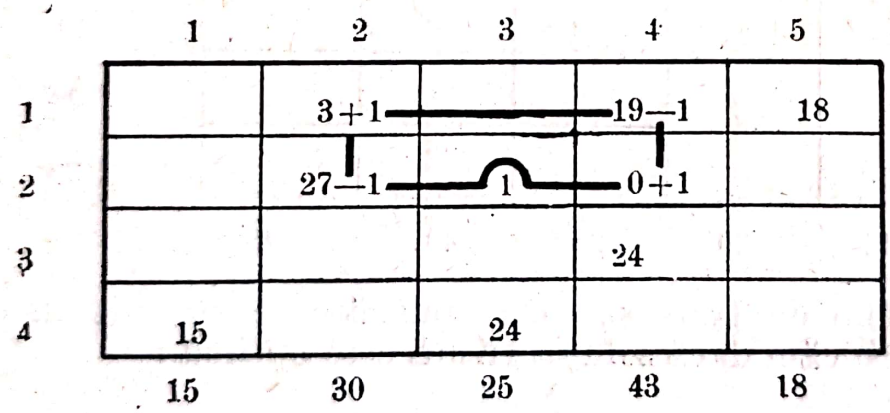
Tabelul 1.2.06 b



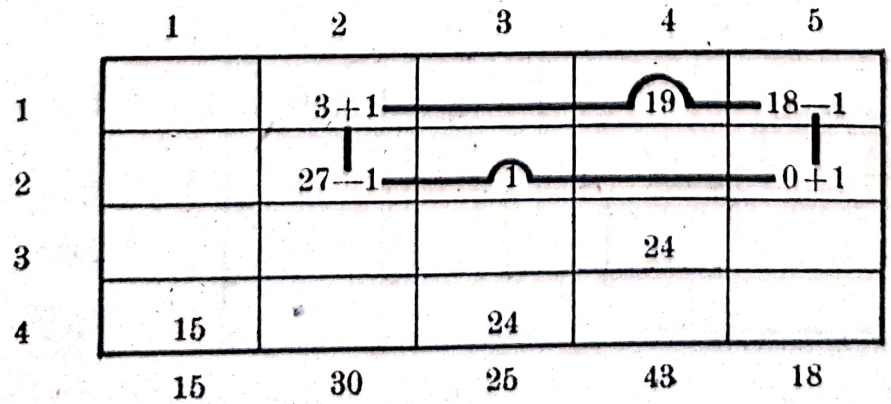
Tabelul 1.2.06 c



Tabelul 1.2.06 d



Tabelul 1.2.06 e



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.2.06 f

	1	2	3	4	5	
1		3—1		19+1	18	40
2		27+1	1—1			28
3	0+1			24 - 1		24
4	15—1		24+1			39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.06 g

	1	2	3	4	5	
1		3—1		19+1	18	40
2		27	1			28
3		0+1		24—1		24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.06 h

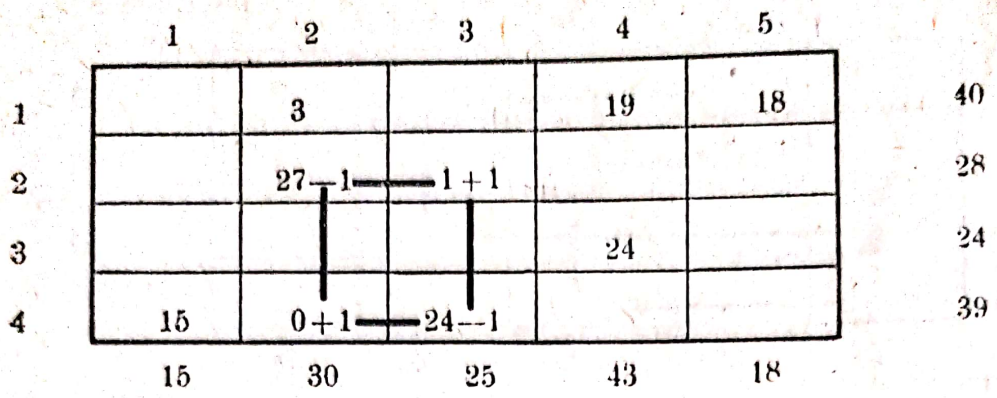
	1	2	3	4	5	
1		3—1		19+1	18	40
2		27+1	1—1			28
3			0+1	24—1		24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

Tabelul 1.2.06 i

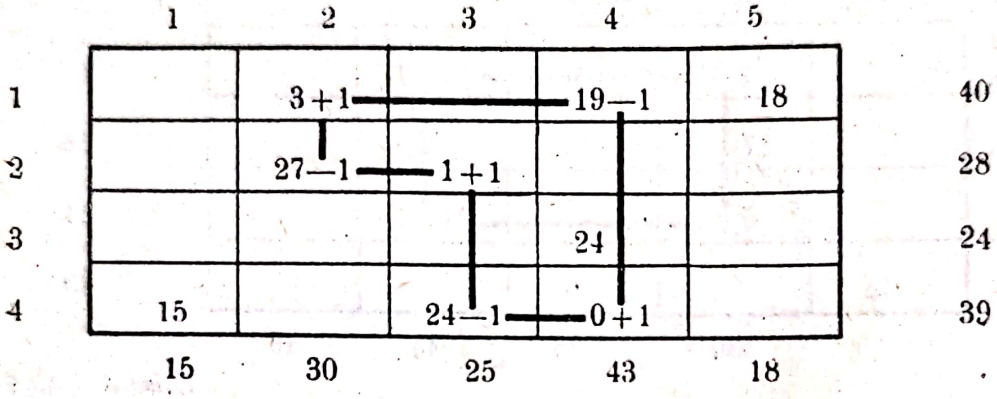
	1	2	3	4	5	
1		3		19+1	18—1	40
2		27	1			28
3				24—1	0+1	24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

Scanned with OKEN Scanner

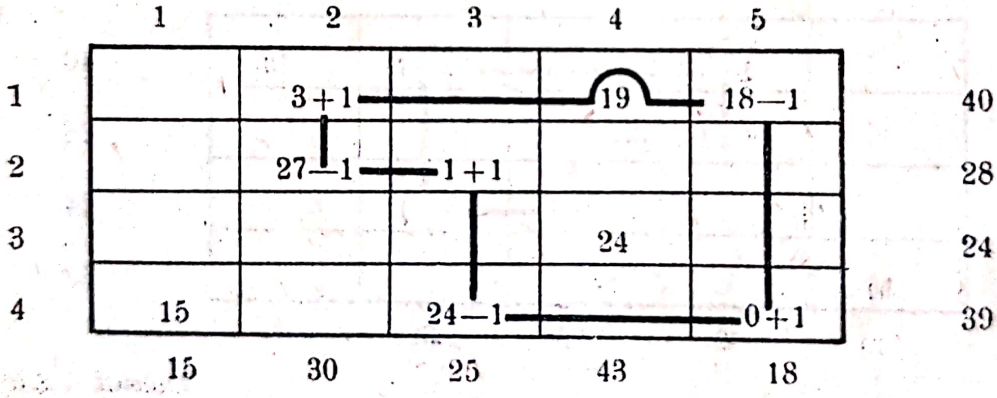
Tabelul 1.2.06 j



Tabelul 1.2.06 k



Tabelul 1.2.06 l



Valorile corespunzătoare lui d sînt :

pentru tabelul 1.2,06 *a* $d_{11} = 330 - 121 + 270 - 187 + 126 - 168 = 250$;
pentru tabelul 1.2.06 *b* $d_{13} = 216 - 187 + 126 - 168 = -13$;
,, ,, 1.2.06 *c* $d_{21} = 331 - 187 + 270 - 121 = 293$;
,, ,, 1.2.06 *d* $d_{24} = 168 - 207 + 168 - 126 = 3$;
,, ,, 1.2.06 *e* $d_{25} = 126 - 137 + 168 - 126 = 31$;
,, ,, 1.2.06 *f* $d_{31} = 270 - 121 + 207 - 168 + 126 - 187 + 270 - 121 = 276$;

Scanned with OKEN Scanner

pentru tabelul 1.2.06 *g* $d_{32} = 157 - 121 + 207 - 168 = 75$;
„ „ 1.2.06 *h* $d_{33} = 137 - 187 + 126 - 168 + 207 - 121 = -6$;
pentru tabelul 1.2.06 *i* $d_{35} = 207 - 137 + 207 - 121 = 156$;
„ „ 1.2.06 *j* $d_{42} = 311 - 126 + 187 - 270 = 102$;
„ „ 1.2.06 *k* $d_{44} = 290 - 207 + 168 - 126 + 187 - 270 = 42$;
pentru tabelul 1.2.06 *l* $d_{45} = 311 - 137 + 168 - 126 + 187 - 270 = 133$.

Dintre cele 2 valori negative ale lui *d*, cea mai mică este — 13 şi corespunde tabelului 1.2.06 *b*, iar cantitatea ce poate fi transferată este 1.

Efectuînd modificările necesare, obţinem soluţia :

Tabelul 1.2.07

	1	2	3	4	5	
1		2	1	19	18	40
2		28				28
3				24		24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

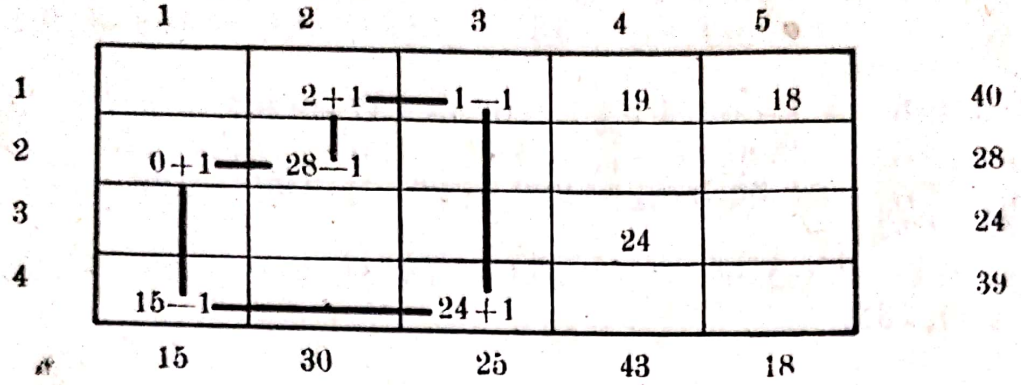
Cheltuielile de transport în acest caz vor fi 21 678 de lei. Să verificăm dacă această soluţie este optimă :

Tabelul 1.2.07 a

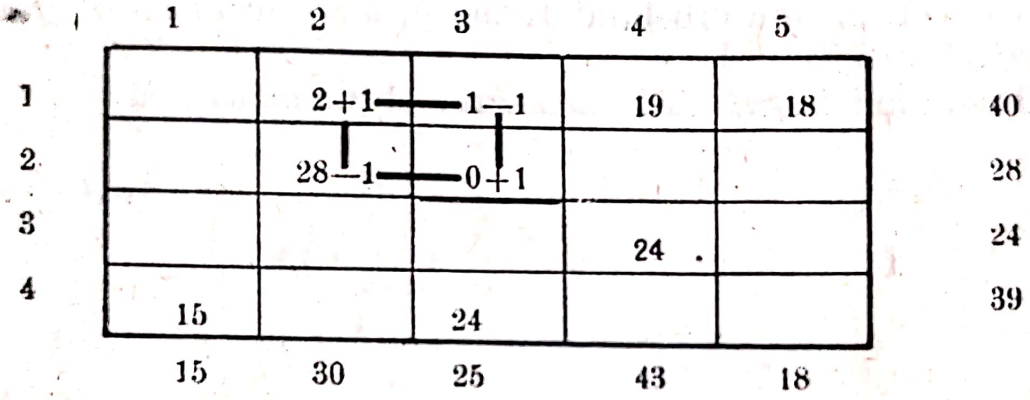
	1	2	3	4	5	
1	0+1	2	1—1	19	18	40
2		28				28
3				24		24
4	15—1		24+1			39
	15	30	25	43	18	

Scanned with OKEN Scanner

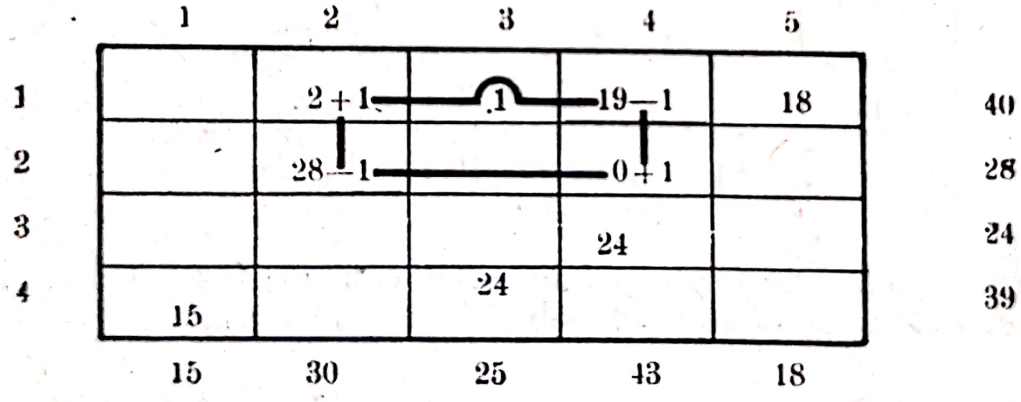
Tabelul 1.2.07 b



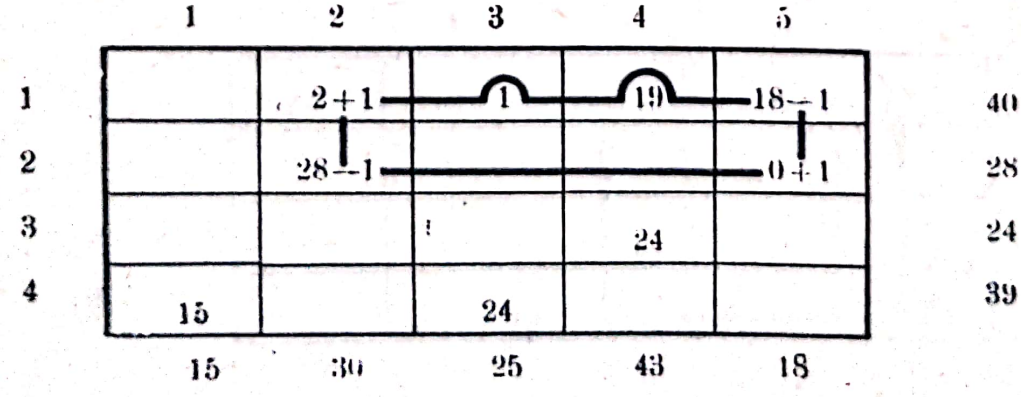
Tabelul 1.2.07 c



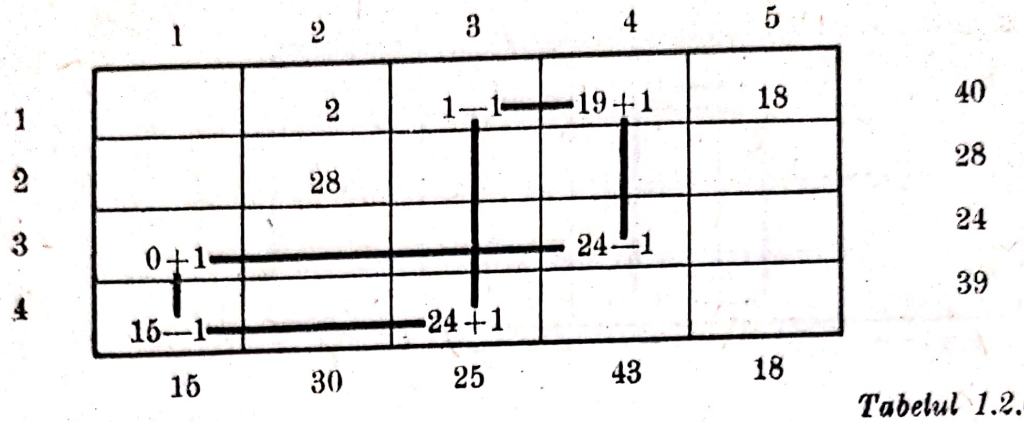
Tabelul 1.2.07 d



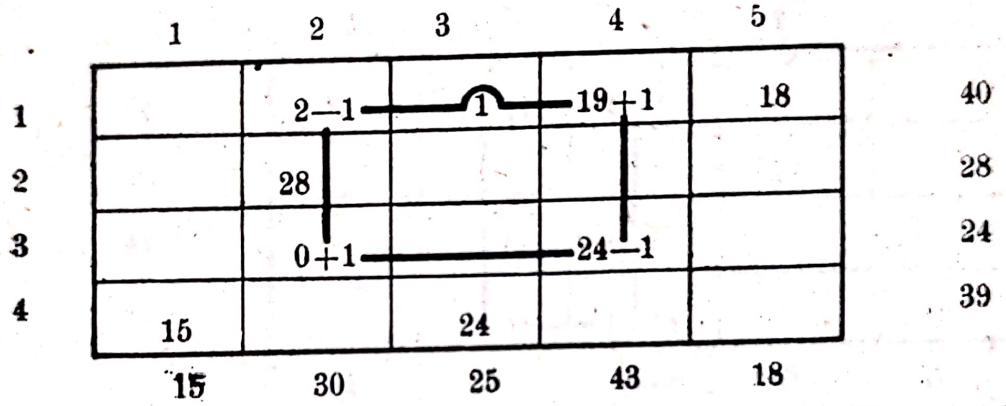
Tabelul 1.2.07 e



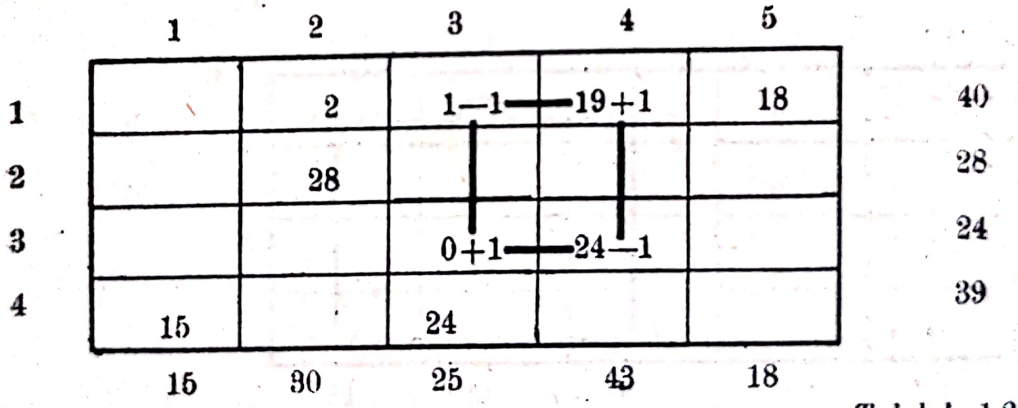
Tabelul 1.2.07 f



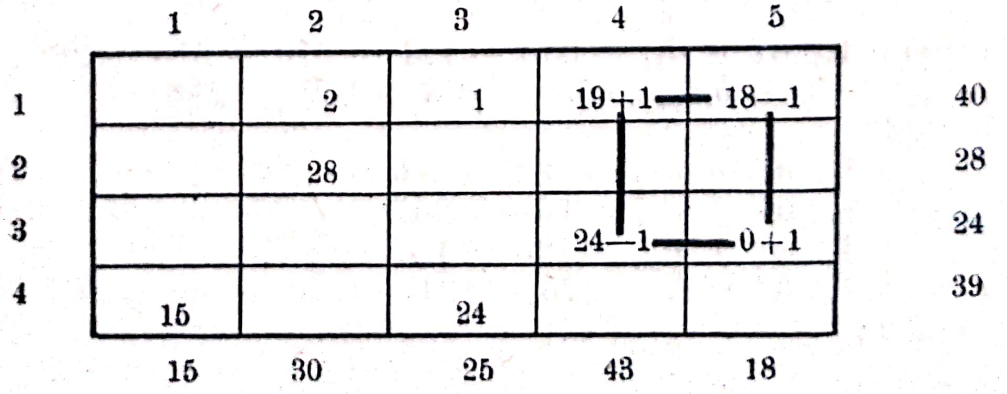
Tabelul 1.2.07 g



Tabelul 1.2.07 h

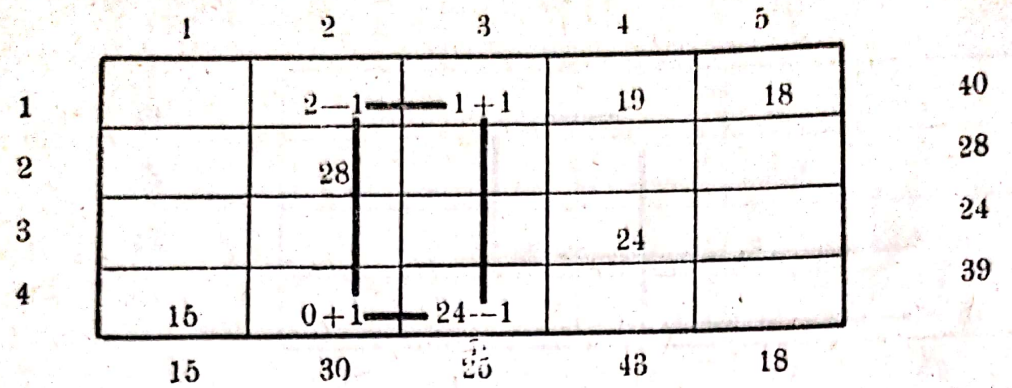


Tabelul 1.2.07 i

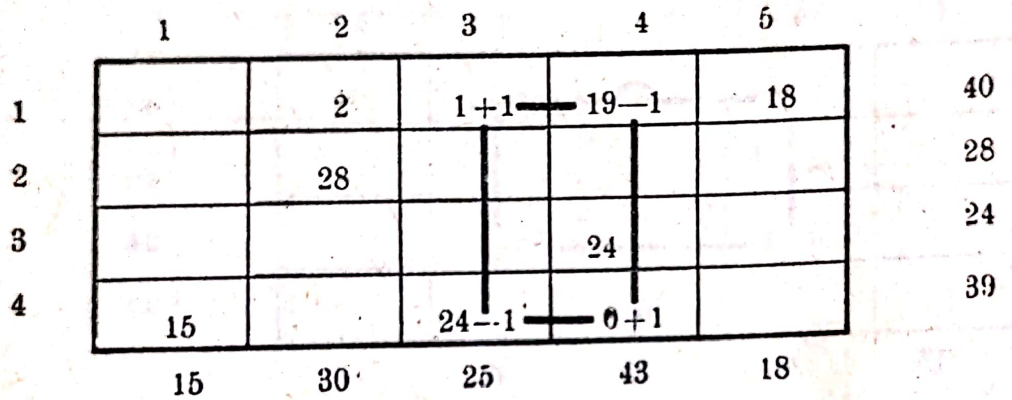


Scanned with OKEN Scanner

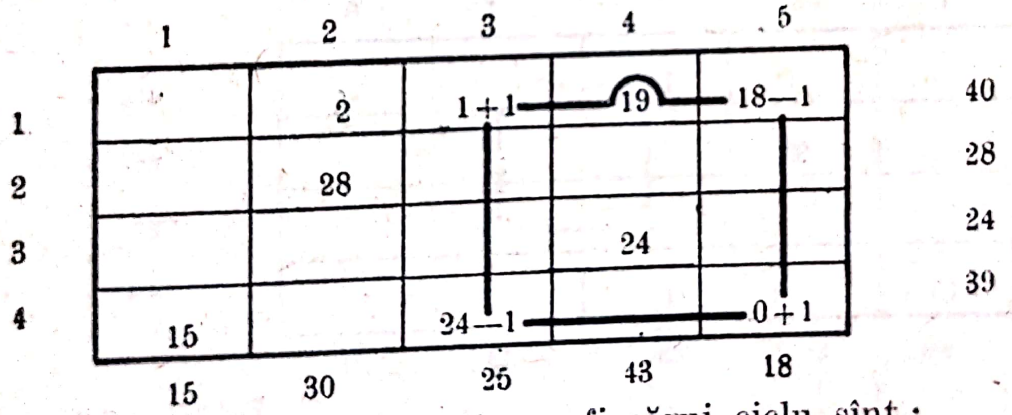
Tabelul 1.2.07 j



Tabelul 1.2.07 k



Tabelul 1.2.07 l



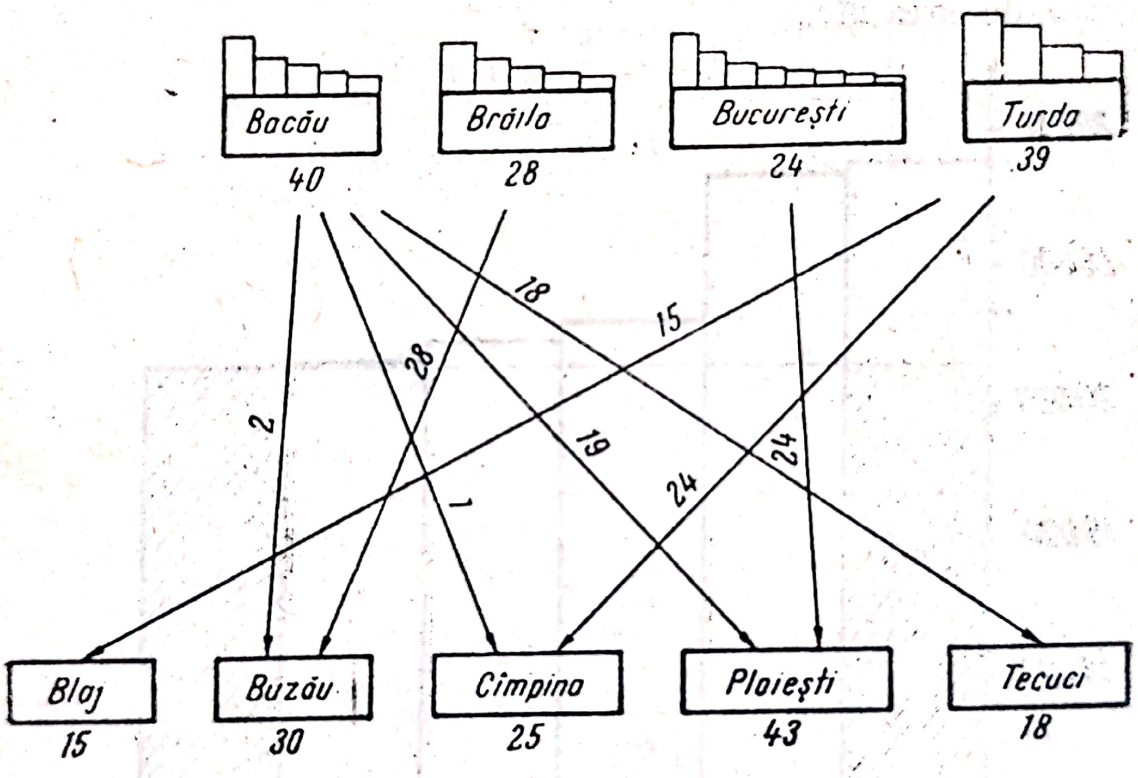
Valorile d corespunzătoare fiecărui ciclu sînt:

pentru tabelul 1.2.07 *a* $d_{11} = 330 - 121 + 270 - 216 = 263$;
„ „ 1.2.07 *b* $d_{21} = 331 - 126 + 168 - 216 + 270 - 121 = 306$;
„ „ 1.2.07 *c* $d_{23} = 187 - 216 + 168 - 126 = 13$;
„ „ 1.2.07 *d* $d_{24} = 168 - 207 + 168 - 126 = 3$;
„ „ 1.2.07 *e* $d_{25} = 126 - 137 + 168 - 126 = 31$;
„ „ 1.2.07 *f* $d_{31} = 270 - 121 + 270 - 216 + 207 - 121 = 289$;

pentru tabelul 1.2.07 $g\ d_{32} = 157 - 168 + 207 - 121 = 75$;
„ „ 1.2.07 $h\ d_{33} = 137 - 216 + 207 - 121 = 7$;
„ „ 1.2.07 $i\ d_{35} = 207 - 137 + 207 - 121 = 156$;
„ „ 1.2.07 $j\ d_{42} = 311 - 168 + 216 - 270 = 89$;
„ „ 1.2.07 $k\ d_{44} = 290 - 207 + 216 - 270 = 29$;
„ „ 1.2.07 $l\ d_{45} = 311 - 137 + 216 - 270 = 120$.

Se observă că d nu mai are nici o valoare negativă. În acest caz, nici o modificare a soluției date de tabelul 1.2.07 nu mai poate conduce la o îmbunătățire, cu alte cuvinte soluția obținută este cea optimă.

Graficul repartiției optime (1.2.01)



Graficul 1.2.01

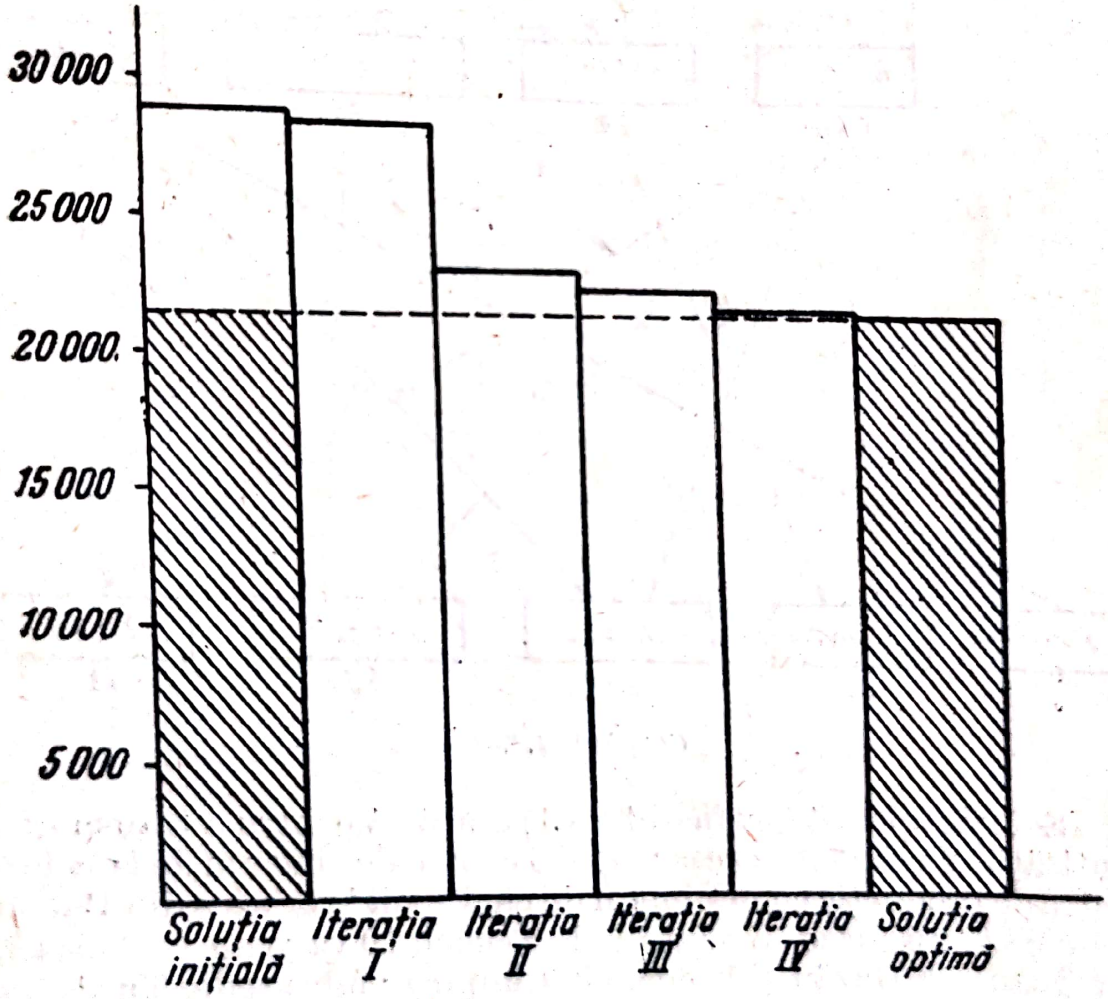
Soluția optimă (graficul 1.2.01) arată că pentru a transporta cantitățile de ciment necesar celor 5 centre de consum de la cele 4 centre de producție cu minimum de cheltuieli [1], fabrica din Bacău trebuie să expedieze 18 vagoane la Tecuci, 19 vagoane la Ploiești, 2 vagoane la Buzău și 1 vagon la Cîmpina ; fabrica din Turda va expedia 15 vagoane la Blaj și 24 de vagoane la Cîmpina ; fabrica din Brăila va trimite 28 de vagoane la Buzău, iar cea din București 24 de vagoane la Ploiești.

[1] Aici cheltuielile de transport sînt luate după tariful C.F.R. și reprezintă deci cheltuielile suportate de beneficiari și nu cele efective ale C.F.R.

Avînd în vedere că chiar în acest exemplu redus există un număr foarte mare de combinații, planul optim era greu de găsit fără aplicarea metodelor matematice. Această greutate devine mult mai mare în cazul creșterii numărului expeditorilor și al destinatarilor.

Chiar dacă acest plan optim ar putea fi găsit printr-o întîmplare, planificatorul nu ar putea fi sigur că soluția este optimă, că nu există o altă soluție cu un volum mai mic de cheltuieli de transport.

În graficul 1.2.02 este arătată scăderea cheltuielilor de transport după fiecare iterație. După 5 iterații s-a ajuns la reducerea acestor cheltuieli de la 28 705 lei la 21 678 de lei, adică cu 7 027 de lei, ceea ce reprezintă o scădere față de soluția inițială de circa 25%.



Graficul 1.2.02.

Această reducere importantă se datorește faptului că soluția inițială a fost luată după procedeul colțului nord-vest, care,

după cum s-a arătat, nu ține cont de nici un considerent economic.

N o t a 1. Pentru exemplul luat am calculat în fiecare iterație toate valorile d, dintre care s-a ales valoarea negativă cea mai mică, care conduce la reducerea cea mai mare a cheltuielilor de transport pentru o unitate transferată. Această regulă nu corespunde totdeauna, în pasul respectiv, celei mai mari reduceri a cheltuielilor totale de transport, care, desigur, depind și de numărul unităților ce se pot transfera.

Dacă urmărim ca în fiecare pas să se obțină cea mai mare reducere a cheltuielilor totale de transport, se procedează în modul următor: se iau pe rînd toate valorile negative ale lui d și se înmulțesc cu cantitățile respective care se pot transfera, iar dintre acestea se alege cea mai mică.

De pildă, în cazul tabelului 1.2.02, avem:

$d_{13} = -13$; conform tabelului 1.2.02 *a*, se poate transfera o cantitate de 23 de unități
$23 \times (-13) \ldots\ldots = -299$;

$d_{14} = -6$; conform tabelului 1.2.02 *b*, se poate transfera o cantitate de 22 de unități
$22 \times (-6) \ldots\ldots = -132$;

$d_{15} = -97$; conform tabelului 1.2.02 *c*, se poate transfera o cantitate de 18 unități
$18 \times (-97) \ldots\ldots = -1\,746$;

$d_{24} = -3$; conform tabelului 1.2.02 *e*, se poate transfera o cantitate de 22 de unități
$22 \times (-3) \ldots\ldots = -66$;

$d_{25} = -66$; conform tabelului 1.2.02 *f*, se poate transfera o cantitate de 18 unități
$18 \times (-66) \ldots\ldots = -1\,188$;

$d_{41} = -286$; conform tabelului 1.2.02 *j*, se poate transfera o cantitate de 2 unități
$2 \times (-286) \ldots\ldots = -572$;

$d_{43} = -36$; conform tabelului 1.2.02 *l*, se poate transfera o cantitate de 2 unități
$2 \times (-36) \ldots\ldots = -72$.

Din aceste calcule rezultă că cea mai mare reducere a totalului cheltuielilor de transport se poate obține folosind valoarea $d_{15} = -97$, care micșorează cheltuielile cu 1 746 de lei, și nu $d_{41} = -286$, care reduce cheltuielile numai cu 572 de lei.

Utilizînd acest criteriu, se ajunge adesea la soluția optimă în mai puține iterații.

N o t a 2. Numărul mare de iterații necesar pentru a se ajunge la soluția optimă se datorește și faptului că în exemplul ales soluția inițială a fost determinată după procedeul colțului nord-vest. După cum am mai arătat, acest procedeu nu ține seama de nici un criteriu economic. Astfel, de pildă, în soluția inițială consumatorul din Blaj a fost repartizat mai întîi fabricii din Bacău (de unde cheltuielile sînt cele mai mari: 330 de lei pe vagon), iar consumatorul din Tecuci fabricii din Turda (cheltuieli de 311 lei pe vagon). Folosirea celorlalte procedee de determinare a soluției inițiale ar reduce simțitor volumul calculelor necesare obținerii soluției optime.

Reamintim că metoda distributivă se aplică în același mod, indiferent după care procedeu este determinată soluția inițială. Dacă pentru exemplul

nostru soluția inițială este stabilită după procedeul elementului minim din tabel, cititorul se poate convinge singur că soluția optimă se obține chiar de la prima repartiție.

N o t a 3. În exemplul ales, toate valorile d corespunzătoare soluției din ultimul pas (tabelul 1.2.07) sînt pozitive, cu alte cuvinte soluția aflată nu mai poate fi îmbunătățită. În unele cazuri, pe lîngă valorile d pozitive pot apărea diferențe d egale cu zero. Și în aceste cazuri soluția găsită este optimă, dar prezența acestor diferențe d egale cu zero indică posibilitatea obținerii mai multor soluții optime. Într-adevăr, prezența unei diferențe d egale cu zero arată că, efectuînd modificarea corespunzătoare acestei diferențe, totalul cheltuielilor nu se schimbă.

În cazul cînd am obținut două (sau mai multe) soluții optime, putem obține prin combinarea lor o serie întreagă de alte soluții optime. Combinarea soluțiilor optime se face efectuînd mediile aritmetice ponderate ale cantităților din aceleași căsuțe, luînd numai ponderi pozitive (vezi exemplul de la p. 92).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al III-lea

DETERMINAREA SOLUȚIEI OPTIME PRIN METODA DISTRIBUTIVĂ-MODIFICATĂ

O altă metodă pentru determinarea soluției optime a unei probleme de transport este cea distributivă-modificată, Această metodă, în general, necesită un volum de calcule mai redus decît metoda distributivă.

În cazul aplicării acestei metode, pentru determinarea soluției optime se pleacă tot de la o soluție de bază inițială, care poate fi determinată după unul dintre procedeele descrise anterior. Avînd, de asemenea, o soluție de bază inițială, se verifică dacă aceasta este optimă și în caz contrar se procedează succesiv la îmbunătățirea ei.

Pentru a arăta în ce constă metoda distributivă-modificată, vom relua exemplul din tabelul 1.2.01.

Fie deci :

Tabelul 1.3.01

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Capacitatea
1	330	168	216	207	137	40
2	331	126	187	168	126	28
3	270	157	137	121	207	24
4	121	311	270	290	311	39
Necesarul	15	30	25	43	18	131

Scanned with OKEN Scanner

Ca și în capitolul precedent, vom determina soluția de bază inițială prin procedeul colțului nord-vest, în care scop reluăm datele din tabelul 1.2.02.

Tabelul 1.3.02

	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5	23			28
3			2	22		24
4				21	18	39
	15	30	25	43	18	

Pentru a verifica dacă această soluție este sau nu optimă[1], vom atașa fiecărei linii i un număr U_i, iar fiecărei coloane j un număr V_j, astfel încît pentru fiecare căsuță ocupată (i, j) să avem:

$$U_i + V_j = c_{ij},$$

unde c_{ij} sînt costurile (sau distanțele în km).

În cazul ales trebuie să determinăm numerele U_1, U_2, U_3, U_4 și V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. În acest scop vom întocmi un nou tabel, în care, pentru căsuțele ocupate din tabelul 1.3.02, vom trece costurile corespunzătoare înscrise în tabelul 1.3.01, astfel:

Tabelul 1.3.03

U_i \ V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
U_1	330	168			
U_2		126	187		
U_3			137	121	
U_4				290	311

[1] Cititorul știe deja că această soluție nu este optimă, însă exemplul este reluat pentru a se putea compara volumul de calcule necesar obținerii soluției optime prin cele două metode.

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza acestui tabel se determină numerele U_i și V_j, astfel încît suma lor să fie egală cu costul înscris în căsuța de la intersecția liniei și a coloanei respective.

Deci trebuie să obținem :

$$(1.3.01)\quad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_1 = c_{11} = 330 \\ (2)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (3)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (4)\ U_2 + V_3 = c_{23} = 187 \\ (5)\ U_3 + V_3 = c_{33} = 137 \\ (6)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_4 = c_{44} = 290 \\ (8)\ U_4 + V_5 = c_{45} = 311 \end{cases}$$

Relațiile de mai sus formează un sistem de 8 ecuații liniare cu 9 necunoscute (U_1, U_2, U_3, U_4 și V_1, V_2, V_3, V_4 și V_5) [1].

Pentru rezolvarea acestui sistem, luînd arbitrar de exemplu :

$$U_1 = 0.$$

obținem următoarele rezultate :

Din prima ecuație :

$$V_1 = 330.$$

Din ecuația (2) :

$$V_2 = 168.$$

Introducînd valoarea lui V_2 în ecuația (3), obținem :

$$U_2 + 168 = 126, \text{ deci :}$$

$$U_2 = -42.$$

Cunoscînd pe U_2, din ecuația (4) se deduce :

$$-42 + V_3 = 187,$$

deci :

$$V_3 = 229.$$

[1] Un sistem de 8 ecuații liniare cu 9 necunoscute are, în general, o infinitate de soluții. Determinarea unei soluții particulare a sistemului de mai sus se poate face, în cazul în care soluția corespunzătoare este de bază, dînd unei necunoscute o valoare arbitrară.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd valoarea lui V_3 în ecuația (5), obținem:

$$U_3 + 229 = 137,$$

deci:

$$U_3 = -92.$$

Cunoscînd pe U_3, din ecuația (6) deducem:

$$-92 + V_4 = 121,$$

deci:

$$V_4 = 213.$$

Introducînd valoarea lui V_4 în ecuația (7), obținem:

$$U_4 + 213 = 290,$$

deci:

$$U_4 = 77.$$

În sfîrșit, din ecuația (8) se deduce:

$$77 + V_5 = 311,$$

deci:

$$V_5 = 234.$$

Înlocuind valorile U_i, V_j aflate, tabelul 1.3.03 devine:

Tabelul 1.3.04

U_i \ V_j	330	168	229	213	234
0	330	168			
—12		126	187		
—92			137	121	
77				290	311

Pentru a verifica dacă valorile U_i și V_j sînt corect calculate (dacă sistemul de ecuații a fost corect soluționat), în tabelul 1.3.04 se controlează dacă suma fiecărei perechi de numere scrise marginal este egală cu numărul înscris în căsuța aflată la intersecția liniei și coloanei corespunzătoare. Se face apoi suma tuturor perechilor U_i și V_j corespunzătoare „locurilor libere" din tabelul 1.3.04 (adică locurile libere din soluția de bază dată de tabelul 1.3.02). Această operație se face direct

Scanned with OKEN Scanner

pe tabel, prin adunarea algebrică a valorii U_i din linia respectivă cu valoarea V_j din coloana respectivă (valorile scrise marginal).

Avem :

Tabelul 1.3.05

U_i \ V_j	330	168	229	213	234
0			229	213	234
—42	288			171	192
—92	238	76			142
77	407	245	306		

Elementele din interiorul acestui tabel se scad din elementele de pe pozițiile corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01). Efectuînd aceste scăderi, obținem :

Tabelul 1.3.06

	1	2	3	4	5
1			—13	—6	—97
2	43			—3	—66
3	32	81			65
4	—286	66	—36		

După cum se poate constata, diferențele din tabelul de mai sus coincid cu variațiile cheltuielilor de transport d, calculate în capitolul precedent pentru tabelele 1.2.02 *a* — 1.2.02 *l*. Diferențele din fiecare căsuță a tabelului de mai sus arată cum se modifică totalul cheltuielilor de transport în cazul în care se transportă o unitate pe ruta corespunzătoare căsuței respective.

Să verificăm acum dacă soluția obținută este optimă.

A verifica optimalitatea unei soluții înseamnă a vedea dacă în tabelul respectiv mai apare sau nu vreo valoare negativă.

Deoarece în tabelul 1.3.06 apar valorile negative :

$$-13,\ -6,\ -97,\ -3,\ -66,\ -286 \text{ și } -36$$

rezultă că soluția nu este optimă și ea trebuie îmbunătățită.

La fel ca în cazul metodei distributive, dintre valorile negative obținute vom alege pe cea mai mică. În exemplul

Scanned with OKEN Scanner

nostru, valoarea negativă cea mai mică este — 286 și corespunde căsuței (4, 1). Rezultă că, folosind ruta (4,1) (Turda-Blaj), pentru fiecare unitate transportată totalul cheltuielilor de transport se micșorează cu 286 de lei. Pentru a determina cantitatea maximă ce poate fi trecută în căsuța (4,1), formăm ciclul corespunzător acesteia. Reamintim că pentru formarea ciclului se pornește de la căsuța aleasă, păşind în „locuri ocupate" și cotind numai în unghi drept, pînă se ajunge la căsuța de la care s-a pornit. Ciclul corespunzător căsuței (4, 1) este :

Tabelul 1.3.07

	1	2	3	4	5	
1	15	25				40
2		5	23			28
3			2	22		24
4	×			21	18	39
	15	30	25	43	18	

După cum și era de așteptat, ciclul din acest tabel este identic cu cel din tabelul 1.2.02 *j*.

Vom numerota colțurile ciclului începînd cu „căsuța liberă", mergînd fie în sensul rotirii acelor de ceasornic, fie în sens contrar (fig. 2).

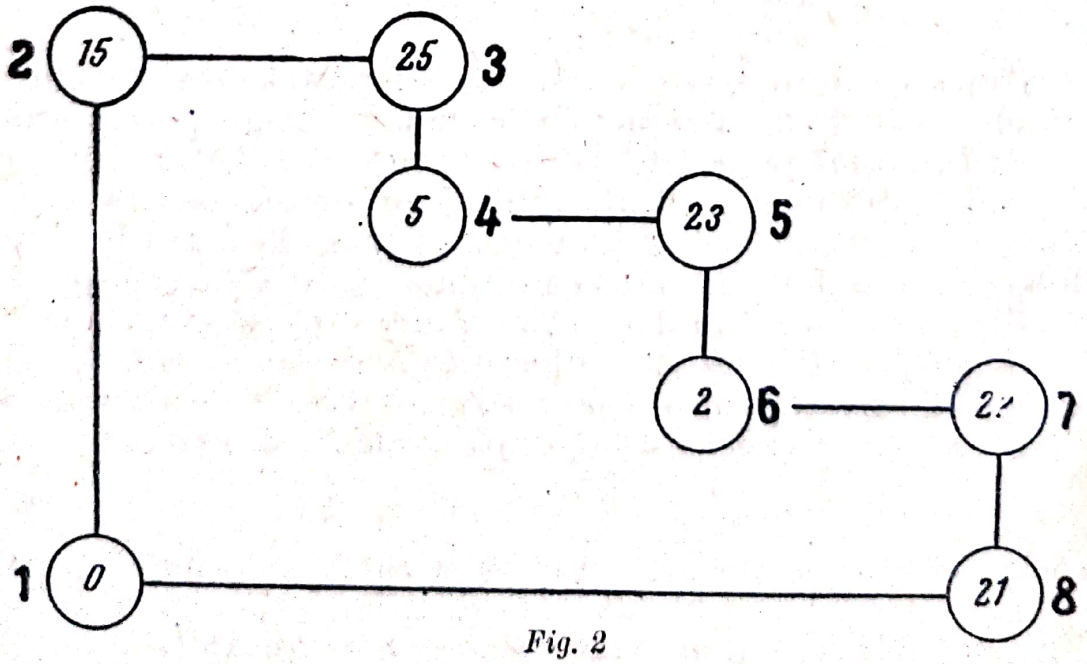


Fig. 2

Atragem atenția că, indiferent de forma ciclului, el trebuie să aibă un număr par de vîrfuri. Alegem cea mai mică cantitate din căsuțele corespunzătoare vîrfurilor pare ale ciclului din tabelul 1.3.07. Aceasta se adună la cantitățile trecute în căsuțele aceluiași tabel, corespunzînd vîrfurilor impare ale ciclului, și se scade din cantitățile aflate în căsuțele care corespund vîrfurilor pare.

În cazul exemplului nostru, cantitatea cea mai mică, din căsuțele corespunzătoare vîrfurilor pare ale ciclului, este 2. Deci 2 este cantitatea maximă cu care se poate modifica, în această situație, planul de transport dat de tabelul 1.3.02. Adunînd această cantitate la cantitățile din căsuțele (4, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), care corespund vîrfurilor impare ale ciclului, și scăzînd-o din cantitățile din căsuțele (1, 1), (2, 2), (3, 3) și (4, 4), care corespund vîrfurilor pare ale ciclului, vom obține următoarea repartiție :

Tabelul 1.3.08

	1	2	3	4	5	
1	13	27			×	40
2		3	25			28
3				24		24
4	2			19	18	39
	15	30	25	43	18	

După obținerea noii soluții (tabelul 1.3.08), folosind același procedeu, verificăm dacă aceasta este sau nu soluția optimă. În acest scop întocmim un nou tabel, în care pentru căsuțele ocupate din tabelul 1.3.08 vom trece costurile corespunzătoare, înscrise în tabelul 1.3.01, și vom determina din nou valorile U_i și V_j.

Astfel avem :

Tabelul 1.3.09

	1	2	3	4	5
1	330	168			
2		126	187		
3				121	
4	121			290	311

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul de ecuaţii corespunzător este :

$$(1.3.02)\quad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_1 = c_{11} = 330 \\ (2)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (3)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (4)\ U_2 + V_3 = c_{23} = 187 \\ (5)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (6)\ U_4 + V_1 = c_{41} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_4 = c_{44} = 290 \\ (8)\ U_4 + V_5 = c_{45} = 311 \end{cases}$$

Luînd $U_1 = 0$ şi procedînd ca mai înainte, obţinem :

$$U_2 = -42 \qquad V_1 = 330$$
$$U_3 = -378 \qquad V_2 = 168$$
$$U_4 = -209 \qquad V_3 = 229$$
$$V_4 = 499$$
$$V_5 = 520$$

Făcînd suma tuturor perechilor U_i şi V_j, obţinem tabelul 1.3.10, în care numerele scrise cu cifre îngroşate corespund locurilor ocupate din tabelul 1.3.08. Astfel vom avea :

Tabelul 1.3.10

U_i \ V_j	330	168	229	499	520
0	**330**	**168**	229	499	520
— 42	288	**126**	**187**	457	478
—378	—48	—210	—149	**121**	142
—209	**121**	—41	20	**290**	**311**

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd elementele înscrise în acest tabel din elementele pozițiilor corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01), obținem :

Tabelul 1.3.11

	1	2	3	4	5
1	0	0	— 13	—292	—383
2	43	0	0	—289	—352
3	318	367	286	0	65
4	0	352	250	0	0

Deoarece în acest tabel apar și numere negative, rezultă că soluția dată de tabelul 1.3.08 nu este optimă. Cel mai mic număr negativ este —383 și corespunde căsuței (1, 5), iar ciclul corespunzător acestei căsuțe este arătat în fig. 3.

Observăm că cea mai mică cantitate din căsuțele corespunzătoare colțurilor pare ale ciclului este 13. Făcînd modificările necesare, obținem următoarea soluție :

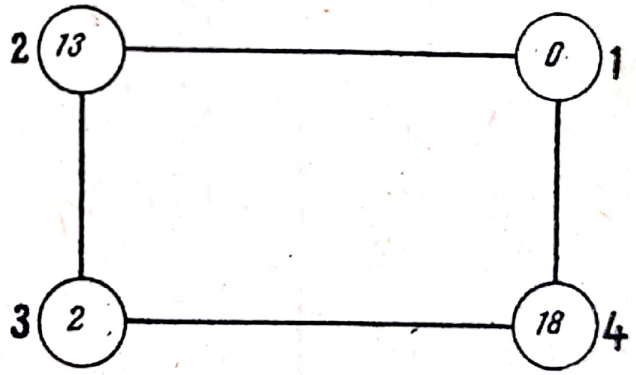


Fig. 3

Tabelul 1.3.12

	1	2	3	4	5	
1		27			13	40
2		3	25			28
3				24		24
4	15			19	5	39
	15	30	25	43	18	

După obținerea noii soluții (tabelul 1.3.12), folosind același procedeu, verificăm dacă aceasta este sau nu optimă. În acest

scop întocmim un nou tabel, în care în căsuțele ocupate din tabelul 1.3.12 vom trece costurile corespunzătoare, înscrise în tabelul 1.3.01. Astfel:

Tabelul 1.3.13

	1	2	3	4	5
1		168			137
2		126	187		
3				121	
4	121			290	311

Sistemul de ecuații corespunzător este:

$$(1.3.03)\quad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (2)\ U_1 + V_5 = c_{15} = 137 \\ (3)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (4)\ U_2 + V_3 = c_{23} = 187 \\ (5)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (6)\ U_4 + V_1 = c_{41} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_4 = c_{44} = 290 \\ (8)\ U_4 + V_5 = c_{45} = 311 \end{cases}$$

Luînd pe $U_1 = 0$, obținem:

$$U_2 = -42 \quad V_1 = -53 \quad V_4 = 116$$

$$U_3 = 5 \quad V_2 = 168 \quad V_5 = 137$$

$$U_4 = 174 \quad V_3 = 229$$

Făcînd suma tuturor perechilor U_i, V_j, obținem tabelul 1.3.14, în care numerele corespunzătoare locurilor ocupate din tabelul 1.3.12 sînt scrise cu cifre îngroșate, astfel:

Tabelul 1.3.14

u_i \ v_j	−53	168	229	116	137
0	— 53	**168**	229	116	137
— 42	— 95	**126**	**187**	74	95
5	— 48	173	234	**121**	142
174	**121**	342	403	**290**	**311**

Scăzînd elementele acestui tabel din elementele de pe pozițiile corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01), obținem :

Tabelul 1.3.15

	1	2	3	4	5
1	383	0	— 13	91	0
2	426	0	0	94	31
3	318	— 16	— 97	0	65
4	0	— 31	—133	0	0

Se observă că soluția obținută nu este optimă, iar cel mai mic număr negativ este — 135 și corespunde căsuței (4, 3). Ciclul corespunzător acestei căsuțe este :

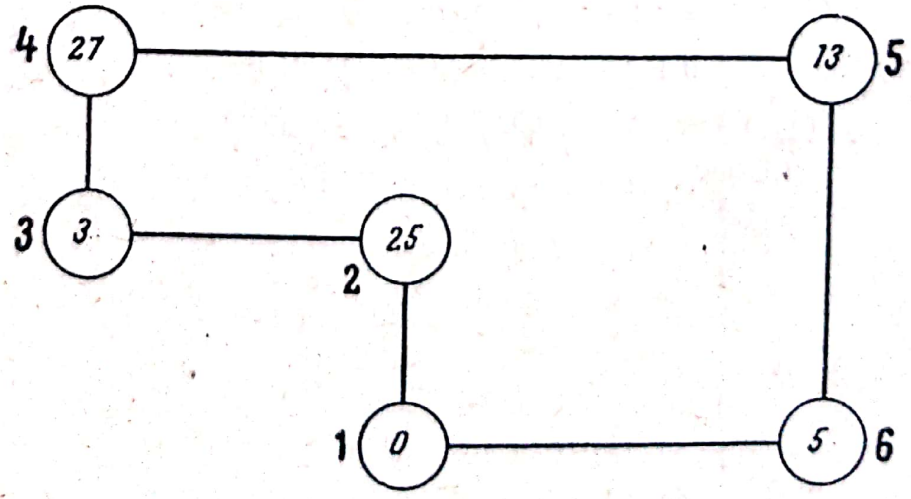


Fig. 4

Cantitatea cea mai mică din căsuțele corespunzătoare colțurilor pare ale ciclului este 5. Făcînd modificările necesare, obținem următoarea soluție :

Tabelul 1.3.16

	1	2	3	4	5	
1		22		×	18	40
2		8	20			28
3				24		24
4	15		5	19		39
	15	30	25	43	18	

Să verificăm acum dacă această soluție este sau nu optimă. Avem :

Tabelul 1.3.17

	1	2	3	4	5
1		168			137
2		126	187		
3				121	
4	121		270	290	

Sistemul de ecuații corespunzător este :

$$(1.3.04)\qquad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (2)\ U_1 + V_5 = c_{15} = 137 \\ (3)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (4)\ U_2 + V_3 = c_{23} = 187 \\ (5)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (6)\ U_4 + V_1 = c_{41} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_3 = c_{43} = 270 \\ (8)\ U_4 + V_4 = c_{44} = 290 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd $U_1 = 0$, obținem :

$$U_2 = -42 \quad V_1 = 80 \quad V_4 = 249$$
$$U_3 = -128 \quad V_2 = 168 \quad V_5 = 137$$
$$U_4 = 41 \quad V_3 = 229$$

Făcînd suma tuturor perechilor U_j, V_i obținem tabelul 1.3.18, în care numerele corespunzătoare locurilor ocupate din tabelul 1.3.16 sînt scrise cu cifre îngroșate.

Avem :

Tabelul 1.3.18

U_i \ V_j	80	168	229	49	137
0	80	**168**	229	249	137
— 42	38	**126**	**187**	207	95
—128	— 48	40	101	**121**	9
41	**121**	209	**270**	**290**	178

Scăzînd elementele din corpul acestui tabel din elementele de pe pozițiile corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01), obținem :

Tabelul 1.3.19

	1	2	3	4	5
1	250	0	—13	—42	0
2	293	0	0	—39	31
3	318	117	36	0	198
4	0	102	0	0	133

Cel mai mic număr negativ este — 42 și corespunde căsuței (1, 4). Ciclul corespunzător acestei căsuțe este arătat în tabelul 1.3.16, iar cantitatea cea mai mică din căsuțele corespunzătoare colțurilor pare ale ciclului este 19.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd modificările necesare, obținem următoarea soluție :

Tabelul 1.3.20

	1	2	3	4	5	
1		3	×	19	18	40
2		27	1			28
3				24		24
4	15		24			39
	15	30	25		18	

Să verificăm acum dacă această soluție este sau nu optimă. Avem :

Tabelul 1.3.21

	1	2	3	4	5
1		168		207	137
2		126	187		
3				121	
4	121		270		

Sistemul de ecuații corespunzător este :

$$(1.3.05)\quad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (2)\ U_1 + V_4 = c_{14} = 207 \\ (3)\ U_1 + V_5 = c_{15} = 137 \\ (4)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (5)\ U_2 + V_3 = c_{23} = 187 \\ (6)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_1 = c_{41} = 121 \\ (8)\ U_4 + V_3 = c_{43} = 270 \end{cases}$$

Luînd $U_1 = 0$, obținem :

$$U_2 = -42 \quad V_1 = 80$$
$$U_3 = -86 \quad V_2 = 168$$

Scanned with OKEN Scanner

$$U_4 = 41 \qquad V_3 = 229$$
$$V_4 = 207$$
$$V_5 = 137$$

Făcînd suma tuturor perechilor U_i , V_j , obținem :

Tabelul 1.3.22

U_i \ V_j	80	168	229	207	137
0	80	**168**	229	**207**	**137**
—42	38	**126**	**187**	165	95
—86	—6	82	143	**121**	51
41	**121**	209	**270**	248	178

Scăzînd elementele din corpul acestui tabel din elementele de pe pozițiile corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01), obținem :

Tabelul 1.3.23

	1	2	3	4	5
1	250	0	—13	0	0
2	293	0	0	3	31
3	276	75	— 6	0	156
4	0	102	0	42	133

Observăm ușor că nici aceasta nu este soluția optimă, iar cel mai mic număr negativ este —13 și corespunde căsuței (1, 3).

Ciclul corespunzător acestei căsuțe este dat de tabelul (1.3.20), iar cantitatea cea mai mică din căsuțele corespunzătoare colțurilor pare ale ciclului este 1. Făcînd modificările necesare, obținem următoarea soluție :

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.3.24

	1	2	3	4	5	
1		2	1	19	18	40
2		28				28
3				24		24
4	15		24			39
	15	30	25	43	18	

Verificînd optimalitatea soluției, avem :

Tabelul 1.3.25

	1	2	3	4	5
1		168	216	207	137
2		126			
3				121	
4	121		270		

Sistemul de ecuații corespunzător este :

$$(1.3.06)\quad \begin{cases} (1)\ U_1 + V_2 = c_{12} = 168 \\ (2)\ U_1 + V_3 = c_{13} = 216 \\ (3)\ U_1 + V_4 = c_{14} = 207 \\ (4)\ U_1 + V_5 = c_{15} = 137 \\ (5)\ U_2 + V_2 = c_{22} = 126 \\ (6)\ U_3 + V_4 = c_{34} = 121 \\ (7)\ U_4 + V_1 = c_{41} = 121 \\ (8)\ U_4 + V_3 = c_{43} = 270 \end{cases}$$

Luînd $U_1 = 0$, obținem :

$$U_2 = -42 \quad V_1 = 67$$
$$U_3 = -86 \quad V_2 = 168$$
$$U_4 = 54 \quad V_3 = 216$$
$$V_4 = 207$$
$$V_5 = 137$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd suma tuturor perechilor U_i, V_j, obținem :

Tabelul 1.3.26

U_i \ V_j	67	168	216	207	137
0	67	**168**	**216**	**207**	**137**
—42	25	**126**	174	165	95
—86	— 19	82	130	**121**	51
54	**121**	222	**270**	261	191

Scăzînd elementele din corpul acestui tabel din elementele de pe pozițiile corespunzătoare din tabelul costurilor (tabelul 1.3.01), obținem :

Tabelul 1.3.27

	1	2	3	4	5
1	263	0	0	0	0
2	306	0	13	3	31
3	289	75	7	0	156
4	0	89	0	29	120

Întrucît în acest ultim tabel nu mai apare nici un număr negativ, nici o altă modificare a soluției aflate (tabelul 1.3.24) nu poate conduce la o îmbunătățire și deci planul aflat este cel optim.

*

Observațiile menționate în capitolul al II-lea, la notele 1, 2 și 3, sînt valabile și pentru metoda distributivă-modificată.

N o t ă. În practică se poate renunța la scrierea sistemului de ecuații $U_i + V_j = c_{ij}$, valorile U_i și V_j putînd fi calculate direct. Astfel, în pasul 1, pentru scrierea sistemului de ecuații a fost necesară întocmirea tabelului 1.3.03. Valorile U_i și V_j din acest tabel se pot calcula astfel :

Scanned with OKEN Scanner

Luăm $U_1 = 0$ din linia întîi și obținem

$$V_1 = 330$$

$$V_2 = 168.$$

Cunoscînd că $V_2 = 168$, U_2 va fi:

$$U_2 + 168 = 126,$$

deci:

$$U_2 = -42.$$

Cunoscînd că $U_2 = -42$ din linia a doua, V_3 va fi:

$$-42 + V_3 = 187,$$

adică:

$$V_3 = 229$$

ș.a.m.d.

Se observă deci că acest sistem de ecuații se poate rezolva ușor fără să-l mai scriem explicit.

În acest fel, valorile U_i și V_j, pe măsură ce le găsim, se scriu marginal pe tabelul cu care lucrăm și obținem direct tabelul 1.3.04.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al IV-lea

PROBLEMA DEGENERĂRII ȘI ALTE CAZURI SPECIALE

În rezolvarea unor probleme de aprovizionare-desfacere pot interveni unele situații speciale.

1. O primă situație specială pe care o vom analiza este problema degenerării. Degenerarea apare ori de cîte ori numărul „locurilor ocupate", într-una din soluții, este mai mic decît $m + n - 1$. În cazul folosirii metodei distributive sau a celei distributive-modificate, pentru înlăturarea ei sînt necesare unele procedee speciale.

2. În unele cazuri, suma cantităților disponibile în centrele de expediție poate să nu fie egală cu suma cantităților necesare centrelor de destinație. Astfel pot exista două alternative: fie că disponibilitățile întrec cantitățile necesare, fie situația inversă, cînd cantitățile disponibile sînt mai mici decît cantitățile necesare. În ultima ipoteză (cazul în care cantitățile disponibile sînt mai mici decît cantitățile necesare), problema poate cere satisfacerea integrală a unor destinatari.

3. O altă situație specială care se poate întîlni în practică are loc atunci cînd din diferite motive nu se pot folosi unele rute.

§ 1. Problema degenerării

După cum se știe, modelul matematic al unei probleme de transport conține $m + n - 1$ ecuații independente cu $m \times n$ variabile (m este numărul centrelor de expediție, iar n — numărul centrelor de destinație).

Pînă acum, atît la aplicarea metodei distributive, cît și la aplicarea celei distributive-modificată, s-a presupus că avem numai soluții de bază nedegenerate, adică soluții cu exact $m + n - 1$ variabile pozitive ($m + n - 1$ locuri ocupate) și nu conțin cicluri. *În cazul în care o soluție conține mai puțin de $m + n - 1$ „locuri ocupate" și nu conține cicluri, avem o soluție de bază degenerată.* Degenerarea poate apărea fie de la

început, adică soluția inițială este o soluție degenerată, fie în cursul soluționării, fie și la început și în cursul soluționării, o dată sau de mai multe ori.

În continuare vom ilustra printr-un exemplu cazurile de mai sus. Vom considera un exemplu unde degenerarea apare atît de la început, în soluția inițială, cît și în cursul soluționării.

Să presupunem că trebuie să determinăm un plan optim de transport pentru un produs omogen, de la patru depozite la cinci consumatori. Datele problemei sînt:

Tabelul 1.4.01

Consumatori / Depozite	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă (t)
1	10	14	4	8	13	25
2	14	10	7	12	12	75
3	15	16	3	16	10	50
4	16	9	10	9	15	20
Cantitatea necesară (t)	20	30	50	40	30	170

Soluția inițială, calculată după procedeul colțului nord-vest, este următoarea:

Tabelul 1.4.02

	1	2	3	4	5	
1	20	5				25
2		25	50	×		75
3			×	40	10	50
4					20	20
	20	30	50	40	30	

Avem deci de-a face cu o problemă de transport cu 4 centre de expediție și 5 centre de destinație. Pentru a nu avea degenerare, soluția trebuia să conțină $4 + 5 - 1 = 8$ „locuri ocupate". După cum se vede însă, soluția obținută în tabelul 1.4.02 conține numai 7 „locuri ocupate", deci este o soluție de bază degenerată. În această situație, problema nu poate fi

Scanned with OKEN Scanner

soluționată deocamdată cu ajutorul metodei distributive și nici cu al celei distributive-modificate.

În cazul soluționării problemei prin metoda distributivă, trebuie analizate toate „locurile libere". Reamintim că în acest scop trebuie să întocmim pentru fiecare „loc liber" ciclul corespunzător și să determinăm modificarea totalului de t/km în cazul cînd cantitățile din căsuțele aparținînd ciclului se modifică cu o unitate.

În cazul tabelului 1.4.02, întrucît soluția este degenerată, nu se vor putea forma ciclurile corespunzătoare tuturor „locurilor libere", ci numai pentru căsuțele (1, 3), (2, 1) și (4, 4). Rezultă deci că, dacă este degenerată, problema nu se poate soluționa cu ajutorul metodei distributive. De asemenea, din același motiv, problema nu poate fi soluționată nici cu ajutorul metodei distributive-modificate, întrucît nu pot fi calculate toate valorile U_i și V_j necesare pentru aplicarea acestei metode

Astfel, pentru soluția din tabelul 1.4.02, scriind sistemul de ecuații $U_i + V_j = c_{ij}$, avem :

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 10 \\ U_1 + V_2 = 14 \\ U_2 + V_2 = 10 \\ U_2 + V_3 = 7 \\ U_3 + V_4 = 16 \\ U_3 + V_5 = 10 \\ U_4 + V_5 = 15 \end{cases} \qquad (1.4.01)$$

Sistemul de mai sus este un sistem de 7 ecuații cu 9 necunoscute. Luînd $U_1 = 0$, obținem $V_1 = 10$, $V_2 = 14$, $U_2 = -4$, $V_3 = 11$. Valorile U_3, U_4, V_4, V_5 nu pot fi calculate, deoarece din ultimele 3 ecuații nu se cunoaște valoarea nici unei necunoscute.

Pentru a se putea aplica metoda distributivă sau cea distributivă-modificată, este necesar să obținem mai întîi o soluție care să aibă 8 locuri ocupate.

În general, degenerarea apare atunci cînd suma cantităților disponibile la cîțiva expeditori este egală cu suma cantităților necesare unui număr oarecare de consumatori [1].

[1] Cazul în care suma cantităților disponibile la toți expeditorii este egală cu suma cantităților necesare tuturor consumatorilor, în general, nu duce la degenerare.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru, suma cantităților disponibile în primele două depozite ($25 + 75 = 100$) este egală cu suma cantităților necesare primilor 3 consumatori ($20 + 30 + 50 = 100$). Tocmai datorită acestui fapt a apărut în soluția inițială cazul de degenerare. Astfel, după ce prin procedeul colțului nord-vest s-au repartizat (vezi tabelul 1.4.02) 20 de unități în căsuța (1, 1) și 5 unități în căsuța (1, 2), expeditorul 1 nu mai are nici un disponibil. Consumatorul 2 mai are nevoie de 25 de unități care sînt repartizate din disponibilul expeditorului 2. După aceasta, expeditorul 2 mai are disponibil 50 de unități. Prin repartizarea în căsuța (2, 3) a 50 de unități se satisface necesarul centrului 3 și totodată se epuizează disponibilul expeditorului 2.

După cum se știe, prin aplicarea corectă a procedeului colțului nord-vest, căsuțele ocupate formează o figură în scară. În cazul soluției din tabelul 1.4.02 avem o figură în scară, dar întreruptă. Pentru ca scara să nu fie întreruptă, este necesar să considerăm una dintre căsuțele (2, 4) sau (3, 3) (însemnate în tabelul 1.4.02) drept „loc ocupat". Vom avea astfel un loc ocupat fictiv, cantitatea din căsuța respectivă fiind zero. Din cele două căsuțe vom alege pe aceea care corespunde celei mai mici distanțe în km (tabelul 1.4.01). Distanța mai mică corespunde căsuței (3, 3).

În locul soluției date de tabelul 1.4.02, vom considera următoarea soluție nedegenerată, cu $4 + 5 - 1 = 8$ căsuțe ocupate (vezi tabelul 1.4.02a).

Sistemul de ecuații $U_i + V_j = c_{ij}$ corespunzător este:

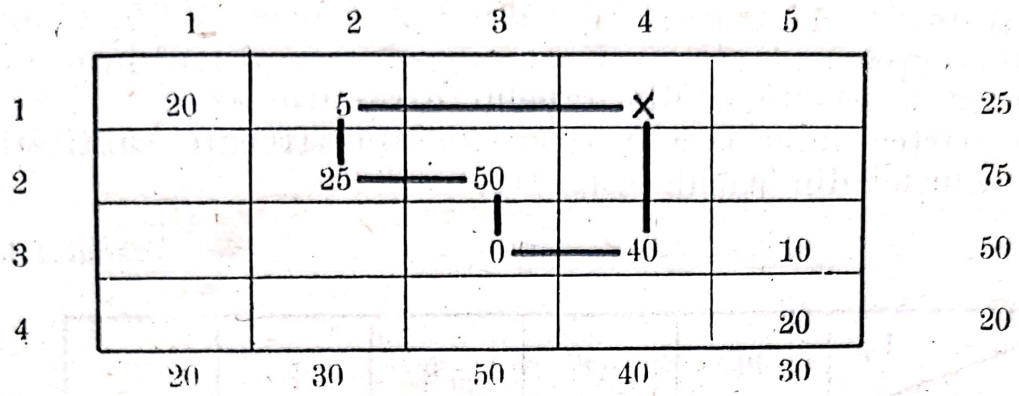
$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 10 \\ U_1 + V_2 = 14 \\ U_2 + V_2 = 10 \\ U_2 + V_3 = 7 \\ U_3 + V_3 = 3 \\ U_3 + V_4 = 16 \\ U_3 + V_5 = 10 \\ U_4 + V_5 = 15 \end{cases} \qquad (1.4.02)$$

Făcînd $U_1 = 0$, obținem:

$$U_2 = -4 \quad V_1 = 10 \quad V_4 = 24$$
$$U_3 = -8 \quad V_2 = 14 \quad V_5 = 18$$
$$U_4 = -3 \quad V_3 = 11$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.4.02 a



Tabelul diferențelor $c_{ij} - U_i - V_j$ este :

Tabelul 1.4.03

	1	2	3	4	5
1	0	0	—7	—16	—5
2	8	0	0	— 8	—2
3	13	10	0	0	0
4	9	—2	2	—12	0

Observăm ușor că soluția nu este optimă și că cea mai mică diferență negativă este — 16. Ciclul corespunzător apare în tabelul 1.4.02 *a*, de unde rezultă că se poate transfera o cantitate egală cu 5. Soluția pe care o obținem este :

Tabelul 1.4.04

	1	2	3	4	5	
1	20			5		25
2		30	45			75
3			5	35	10	50
4					20	20
	20	30	50	40	30	

Soluția din acest tabel conține 8 „locuri ocupate", deci nu mai este o soluție degenerată. În continuare vom verifica dacă ea este și soluția optimă, iar dacă nu, procedînd ca de obicei, o vom îmbunătăți succesiv pînă vom ajunge la soluția optimă.

Pentru verificarea optimalității soluției se calculează valorile U_i, V_j (fără să mai scriem sistemul de ecuații corespunză-

tor, conform notei de la pag. 83). După calculul sumelor $U_i + V_j$ și după scăderea acestora din c_{ij} (tabelul 1.4.01), obținem diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, care se înscriu direct în partea superioară a căsuțelor din tabelul care urmează.

În partea inferioară a căsuțelor sînt trecute cantitățile x_{ij} ale soluției din pasul respectiv.

Tabelul 1.4.05

U_i \ V_j	10	−2	−5	8	2	
0	0 (20)	16	9	0 (5)	11	25
12	−8	0 (30)	0 (45)	−8	−2	75
8	−3	10	0 (5)	0 (35)	0 (10)	50
13	−7	−2	2	−12 (×)	0 (20)	20
	20	30	50	40	30	

Diferența negativă cea mai mică din tabelul 1.4.05 este -12, și corespunde căsuței (4, 4), iar mărimea cu care se modifică toate cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător (vezi tabelul 1.4.05) este 20. Noua soluție și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ sînt:

Tabelul 1.4.06

U_i \ V_j	10	−2	−5	8	2	
0	0 (20)	16	9	0 (5)	11	25
12	−8	0 (30)	0 (45)	−8 (×)	−2	75
8	−3	10	0 (5)	0 (15)	0 (30)	50
1	5	10	14	0 (20)	12	20
	20	30	50	40	30	

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că cea mai mică diferență negativă este — 8 și corespunde căsuțelor (2, 1) și (2, 4). Alegînd dintre acestea, de exemplu, căsuța (2, 4), găsim că cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător se modifică cu 15 unități (vezi tabelul 1.4.06), iar noua soluție este :

Tabelul 1.4.07

U_i \ V_j	10	6	3	8	10	
0	0 (20)	8	1	0 (5)	3	25
4	0	0 (30)	0 (30)	0 (15)	−2	75
0	5	10	0 (20)	8	0 (30)	50
1	5	2	6	0 (20)	4	20
	20	30	50	40	30	

Din acest tabel observăm că singura diferență negativă este — 2 și corespunde căsuței (2, 5). Cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător se vor modifica cu 30 de unități (tabelul 1.4.07).

Noua soluție va fi :

Tabelul 1.4.08

U_i \ V_j	10	6	1	8	8	
0	0 (20)	8	3	0 (5)	5	25
4	0	0 (30)	2	0 (15)	0 (30)	75
2	3	8	0 (50)	6	0	50
1	5	2	8	0 (20)	6	20
	20	30	50	40	30	

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît soluția obținută are numai 7 căsuțe ocupate, ea este degenerată. Vom lua din nou o căsuță pe care o vom „ocupa" fictiv, și anume una dintre căsuțele ocupate în pasul anterior care au devenit „libere", adică una dintre căsuțele (2, 3) sau (3, 5). Dintre acestea vom alege pe cea care corespunde celei mai mici cheltuieli (celei mai mici distanțe). În cazul nostru, costurile din căsuțele amintite sînt identice (10), așa că putem alege pe oricare dintre ele. Considerînd căsuța (3, 5) ocupată de cantitatea zero, calculăm diferențele pe care le menționăm tot în tabelul 1.4.08. În acest pas, nemaiapărînd nici o diferență negativă, soluția obținută este optimă, iar faptul că în căsuța liberă (2, 1) apare zero ne mai indică posibilitatea determinării unei alte soluții de asemenea optimă (vezi nota 3, p. 66).

Formînd ciclul corespunzător căsuței (2, 1) (tabelul 1.4.08), se obține:

Tabelul 1.4.09

	1	2	3	4	5	
1	5			20		25
2	15	30			30	75
3			50		0	50
4				20		20
	20	30	50	40	30	

Avînd două soluții optime (tabelul 1.4.08 și 1.4.09) și procedînd conform notei 3, cap. III, vom putea obține o întreagă serie de alte soluții optime. Astfel, de pildă, făcînd media aritmetică simplă a celor două soluții optime, obținem următoarea soluție de asemenea optimă:

Tabelul 1.4.10

	1	2	3	4	5
1	12,5			12,5	
2	7,5	30		7,5	30
3			50		
4				20	

Totalul t/km pentru cele trei soluții este același, și anume de 1 410 t/km.

Scanned with OKEN Scanner

Alte soluții putem obține făcînd diferite alte medii ponderate, luînd numai ponderi pozitive.

În cazul considerat mai înainte, soluțiilor degenerate le lipsea numai cîte un singur „loc ocupat". Uneori pot lipsi însă mai multe „locuri ocupate" (adică soluția poate să aibă $m + n - 3$, $m + n - 4$ etc. „locuri ocupate"). În asemenea situații este nevoie să se introducă fictiv atîtea „locuri ocupate" cîte sînt necesare pentru ca soluția să conțină $m + n - 1$ „locuri ocupate". Căsuțele ce se vor ocupa cu cantitatea zero vor fi astfel determinate încît să se poată calcula toate valorile U_i și V_j.

§ 2. Situația cînd disponibilitățile depășesc nevoile consumatorilor

În practică se întîlnesc adesea situații cînd la întocmirea planului nu se cunosc toți beneficiarii. În acest caz urmează să se păstreze în rezervă cantitățile necesare acestora pentru a le repartiza ulterior. Neavînd nici o informație asupra destinatarilor, putem presupune că locul de păstrare a cantităților rămase în rezervă este indiferent.

Să presupunem că în 4 depozite, pe care le notăm D_1, D_2, D_3 și D_4, există o cantitate totală de 800 t dintr-un anumit produs, repartizate pe depozite astfel: 210 t, 230 t, 160 t și 200 t. Cinci șantiere S_1, S_2, S_3, S_4 și S_5 trebuie să primească de la aceste depozite, respectiv, 150 t, 120 t, 180 t, 50 t, 120 t, iar restul de 180 t urmează să le păstrăm pentru a fi expediate ulterior unor șantiere care se vor deschide.

Scopul urmărit este de a repartiza în așa fel cele 620 t pentru care cunoaștem beneficiarii, încît să realizăm minimum de t/km. Datele problemei sînt:

Tabelul 1.4.11

D \ S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Cantitatea ce poate fi livrată
D_1	140	170	80	110	55	210
D_2	90	160	210	240	70	230
D_3	60	110	180	150	95	160
D_4	120	140	100	50	105	200
Cantitatea solicitată	150	120	180	50	120	800 / 620

Pentru determinarea soluției optime vom aplica metoda distributivă-modificată. În acest scop vom determina soluția inițială prin procedeul nord-vest (după cum am mai spus, soluția inițială poate fi determinată prin oricare dintre procedeele cunoscute):

Tabelul 1.4.12

	1	2	3	4	5	
1	150	60	0	0	0	210
2	0	60	170	0	0	230
3	0	0	10	50	100	160
4	0	0	0	0	20	20
	150	120	180	50	120	

Se vede că de la depozitul D_4, din cele 200 t, au fost repartizate numai 20 t, restul de 180 t prin această repartiție rămînînd în rezervă. După cum se știe, prin aplicarea metodei distributive-modificate (sau a celei distributive), suma pe fiecare linie și pe fiecare coloană rămîne în permanență aceeași. Rezultă că situația din soluția inițială, în care întreaga rezervă se formează la depozitul D_4, ar rămîne definitivă. Aceasta poate influența nefavorabil întregul rezultat, deoarece există posibilitatea ca păstrarea rezervei la alte depozite să fie mai avantajoasă. Pentru a nu limita de la început la ce depozite urmează să fie păstrată rezerva, se va lua în calcul întreaga cantitate de 800 t. Aceasta se va face prin introducerea în problemă a unui nou beneficiar S_6, denumit *beneficiar fictiv*, căruia i se va repartiza întreaga cantitate disponibilă (180 t). Întrucît în realitate acest beneficiar nu există, distanța în kilometri (sau costurile de transport) de la fiecare depozit la acesta se vor lua egale cu zero.

Adică vom obține (vezi tabelul 1.4.13).

Soluția inițială, calculată prin procedeul colțului nord-vest, reiese din tabelul 1.4.14.

Totalul corespunzător acestei soluții este de 97 400 t/km.

Procedînd conform metodei distributive-modificate, se ajunge la următoarea soluție optimă (vezi tabelul 1.4.15).

Se observă că soluția obținută este optimă, iar totalul corespunzător acestei soluții este de 50 350 t/km.

Din situația oglindită în tabelul 1.4.15 rezultă (vezi și graficul 1.4.01):

— șantierul 1 primește 110 t de la depozitul 2 și 40 t de la depozitul 3;

Tabelul 1.4.13

S / D	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Cantitatea ce poate fi livrată
D_1	140	170	80	110	55	0	210
D_2	90	160	210	240	70	0	230
D_3	60	110	180	150	95	0	160
D_4	120	140	100	50	105	0	200
Cantitatea solicitată	150	120	180	50	120	180	800

Tabelul 1.4.14

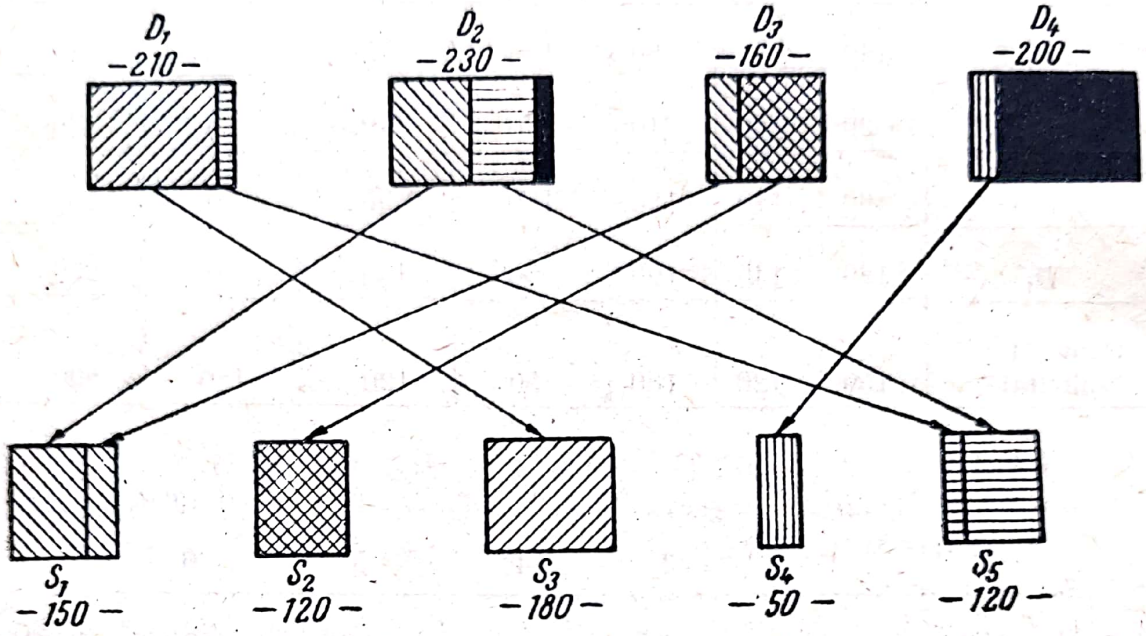
	1	2	3	4	5	6	
1	150	60	0	0	0	0	210
2	0	60	170	0	0	0	230
3	0	0	10	50	100	0	160
4	0	0	0	0	20	180	200
	150	120	180	50	120	180	800

Tabelul 1.4.15

S / D	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Cantitatea ce poate fi livrată
D_1			180		30		210
D_2	110				90	30	230
D_3	40	120					160
D_4				50		150	200
Cantitatea solicitată	150	120	180	50	120	180	800

Scanned with OKEN Scanner

— şantierul 2 primeşte 120 t de la depozitul 3;
— şantierul 3 primeşte 180 t de la depozitul 1;
— şantierul 4 primeşte 50 t de la depozitul 4;
— şantierul 5 primeşte 30 t de la depozitul 1 şi 90 t de la depozitul 2.



Graficul 1.4.01.

Dintre cele 180 t care rămîn în rezervă (cantitate repartizată şantierului fictiv 6), 30 t vor fi păstrate la depozitul 2 iar 150 t la depozitul 4.

Trebuie să subliniem că această soluţie este optimă numai în situaţia în care nu există nici o indicaţie asupra amplasării noilor şantiere şi deci nu există nici o preferinţă asupra locului unde să se păstreze rezerva.

Uneori se pot indica anumite cantităţi minime ce trebuie să rămînă ca rezervă în fiecare depozit. În asemenea situaţii, din disponibilul fiecărui depozit se scade cantitatea respectivă, iar dacă suma cantităţilor disponibile la toate depozitele continuă să întreacă suma cantităţilor necesare, în vederea soluţionării problemei, pentru cantitatea rămasă nesolicitată, se introduce un beneficiar fictiv.

§ 3. Situaţia cînd disponibilităţile sînt mai mici decît nevoile consumatorilor

Vom arăta în continuare modul de soluţionare a problemei în cazul cînd din diferite motive cantităţile existente în centrele de expediţie sînt mai mici decît necesităţile centrelor de destinaţie.

Să presupunem că avem 4 fabrici care aprovizionează cu un anumit produs 5 consumatori.

Cantităţile disponibile la cele 4 fabrici sînt, respectiv, de 400, 150, 280 şi 100 t. Necesarul consumatorilor este, respectiv, de 140, 290, 270, 150 şi 80 t. După cum se vede, conform planificării, cantităţile ce pot fi livrate sînt egale cu cantităţile necesare centrelor de consum.

Datele problemei sînt următoarele :

Tabelul 1.4.16

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă (t)
1	20	28	50	24	22	400
2	18	27	48	46	25	150
3	16	24	19	48	36	280
4	10	18	24	28	30	100
Cantitatea necesară (t)	140	290	270	150	80	930

Aplicînd oricare dintre metodele de soluţionare cunoscute, vom obţine următorul plan optim de transport :

Tabelul 1.4.17

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1		170		150	80	400
2	140	10				150
3		10	270			280
4		100				100
Cantitatea necesară	140	290	270	150	80	930

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că, din anumite motive, fabrica 2 nu mai poate livra cele 150 t. În acest caz nu toți consumatorii vor primi întreaga cantitate necesară. Întrucît pentru moment nu punem nici o condiție privind satisfacerea cu precădere a unor consumatori, planul de transport va fi determinat în așa fel, încît cele 780 t care pot fi livrate de fabricile 1, 3, 4 să se repartizeze celor 5 consumatori astfel încît totalul cheltuielilor de transport să fie minim.

Din tabelul 1.4.17, care conține soluția optimă pentru situația inițială, observăm că fabrica 2 urma să livreze 140 t primului consumator și 10 t consumatorului 2. Dacă fabrica 2 nu mai poate livra cele 150 t, se pune întrebarea dacă planul de transport dat în tabelul 1.4.18, obținut din tabelul 1.4.17 prin excluderea liniei 2, este sau nu optim pentru noua situație.

După cum vom vedea însă mai departe, acest plan nu este optim.

Tabelul 1.4.18

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă (t)
1		170		150	80	400
3		10	270			280
4		100				100
Cantitatea repartizată (t)	0	280	270	150	80	780

În general, dacă disponibilitățile sînt mai mici decît necesarul, necunoscînd consumatorii care nu vor primi întreaga cantitate, pentru soluționarea problemei se va introduce un *expeditor fictiv*. Cantitatea ce va fi „expediată" de acesta se ia egală cu diferența dintre totalul necesarului și totalul disponibil. În acest mod, prin introducerea acestui expeditor fictiv, suma cantităților disponibile devine egală cu suma cantităților necesare și deci obținem o problemă obișnuită de transport. Deoarece, în realitate, de la expeditorul fictiv nu se transportă nici o cantitate, cheltuielile de transport de la acesta la fiecare dintre consumatori se iau egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede că procedeul este asemănător cu cel folosit în situația precedentă, cînd necesarul era mai mic decît disponibilul, în care caz introdusesem un consumator fictiv.

În cazul acesta, prin introducerea unei fabrici fictive, care de asemenea „va expedia" 150 t în locul fabricii 2, tabelul 1.4.16 va deveni :

Tabelul 1.4.19

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	20	28	50	24	22	400
2	0	0	0	0	0	150
3	16	24	19	48	36	280
4	10	18	24	28	30	100
Cantitatea necesară	140	290	270	150	80	930

Soluția inițială, calculată prin procedeul minimului pe coloană, este dată de tabelul următor, unde numerele îngroșate arată ordinea în care s-a făcut distribuirea cantităților.

Tabelul 1.4.20

	1	2	3	4	5	
1			**6** 170	**7** 150	**8** 80	400
2	**1** 140	**2** 10				150
3		**4** 180	**5** 100			280
4		**3** 100				100
	140	290	270	150	80	

Totalul tonelor-km este de 21 880.

Procedînd după metoda distributivă-modificată, vom obține următoarea soluție optimă :

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.4.21

Fabrici \ Consumatori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă (t)
1	140	30		150	80	400
2		150				150
3		10	270			280
4		100				100
Cantitatea necesară (t)	140	290	270	150	80	930

Conform soluției optime, primul consumator primește 140 t de la fabrica 1; al doilea consumator primește 30 t de la fabrica 1, 10 t de la fabrica 3 și 100 t de la fabrica 4; al treilea consumator primește 270 t de la fabrica 3; al patrulea consumator primește 150 t de la fabrica 1, iar al cincilea consumator primește 80 t de la fabrica 1. Deoarece expeditorul fictiv „livrează" toate cele 150 t consumatorului 2, rezultă că acesta va primi mai puțin cu 150 t decît cantitatea de care are nevoie.

Făcînd calculele, observăm că totalul tonelor-kilometri corespunzător tabelului 1.4.21 este 16 170, deci cu 1 120 mai mic decît totalul tonelor-kilometri corespunzător tabelului 1.4.18, obținut pe baza vechii soluții optime (tabelul 1.4.17), prin excluderea directă a fabricii 2.

În afară de soluția optimă, dată în tabelul 1.4.21, mai există și următoarele două soluții optime:

Tabelul 1.4.22

	1	2	3	4	5	
1	130	40		150	80	400
2		150				150
3	10		270			280
4		100				100
	140	290	270	150	80	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.4.23

	1	2	3	4	5	
1	40	130		150	80	400
2		150				150
3		10	270			280
4	100					100
	140	290	270	150	80	

Faptul că pentru unele probleme de transport se pot obține mai multe soluții optime (soluții care corespund la aceleași cheltuieli sau la același total de t/km) are o deosebită importanță practică, întrucît planificatorul, în cazul în care una dintre soluțiile optime nu este acceptabilă, are la dispoziție alte soluții optime.

§ 4. Situația cînd anumite rute nu se pot utiliza

Pînă în prezent, în toate cazurile analizate se puteau utiliza toate rutele posibile, cu alte cuvinte oricare expeditor putea livra oricărui consumator. În practică se ivesc însă multe situații cînd anumite rute trebuie evitate. Astfel se poate întîlni cazul cînd un anumit consumator trebuie să primească numai de la anumiți expeditori cantitatea de care are nevoie.

Aceeași situație se poate ivi și atunci cînd totalul disponibilului este mai mic decît totalul necesarului, iar anumiți beneficiari trebuie să primească integral cantitatea necesară. De pildă, în exemplul tratat în paragraful precedent, necesarul întrecea disponibilul cu 150 t, iar conform planului optim (tabelul 1.4.21 sau 1.4.22 sau 1.4.23) beneficiarul 2 primea mai puțin cu 150 tone. Să presupunem că tocmai acest beneficiar trebuie să primească integral cantitatea necesară (cantitatea de 290 t), pentru ceilalți beneficiari nepunîndu-se nici o condiție de acest gen. În acest caz, planurile 1.4.21, 1.4.22 și 1.4.23 nu mai au valabilitate practică.

Pentru a arăta modul cum se rezolvă problema în astfel de cazuri, vom relua exemplul de la paragraful precedent și vom presupune că beneficiarul 2 trebuie să primească întreaga cantitate necesară [1]. Pentru aceasta trebuie exclusă posibi-

[1] Uneori se pune problema ca fiecare beneficiar să primească cel puțin o cantitate dată. Acest gen de problemă va fi tratat la capitolul „Problema de transport cu capacități limitate".

litatea ca în planul optim expeditorul 2 (fictiv) „să livreze" consumatorului 2 o anumită cantitate.

Deoarece prin metoda de calcul rutele de transport folosite sînt astfel alese încît să se minimizeze cheltuielile totale de transport (totalul t/km), punînd în mod artificial, pentru rutele pe care vrem să le excludem, cheltuieli (sau distanțe) foarte mari în raport cu celelalte cheltuieli (sau distanțe), vom fi siguri că aceste rute nu vor fi utilizate în planul optim de transport.

În cazul nostru, în locul tabelului 1.4.19 vom avea :

Tabelul 1.4.24

Consumatori / Fabrici	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă (t)
1	20	28	50	24	22	400
2	0	1 000	0	0	0	150
3	16	24	19	48	36	280
4	10	18	24	28	30	100
Cantitatea necesară (t)	140	290	270	150	80	930

Observăm că pentru ruta corespunzătoare căsuței (2,2) s-a considerat distanța de 1 000, ceea ce, în raport cu celelalte distanțe, este foarte mult. În acest mod sîntem asigurați că această rută nu va fi folosită în planul optim de transport.

Soluția inițială, calculată prin procedeul minimului pe coloană, este dată în tabelul 1.4.25, în care sînt indicate valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$.

Diferența negativă cea mai mică din tabelul 1.4.25 este — 30, iar cantitatea cu care se modifică cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător este 140 t. (tabelul 1.4.26).

Singura diferență negativă este — 27 și corespunde căsuței (1,2), iar cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător (vezi tabelul 1.4.26) se vor modifica cu 30 t. (tabelul 1.4.27).

De aici rezultă că singura diferență negativă este — 1 și corespunde căsuței (2,4), iar cantitățile din căsuțele ciclului corespunzător (tabelul 1.4.27) se vor modifica cu 150 t (tabelul 1.4.28).

Tabelul 1.4.25

u_i \ v_j	50	55	50	24	22	
0	−30	−27	0	0	0	400
			170	150	80	
−50	0	995	0	26	28	150
	140		10			
−3	−3	0	0	55	45	280
		190	90			
−37	−3	0	11	35	45	100
		100				
	140	290	270	150	80	

Tabelul 1.4.26

u_i \ v_j	20	55	50	24	22	
0	0	−27	0	0	0	400
	140		30	150	80	
−50	30	995	0	26	28	150
			150			
−31	27	0	0	55	45	280
		190	90			
−37	27	0	11	35	45	100
		100				
	140	290	270	150	80	

Tabelul 1.4.27

u_i \ v_j	20	28	23	24	22	
0	0	0	27	0	0	400
	140	30		150	80	
−23	3	995	0	−1	1	150
			150			
−4	0	0	0	28	18	280
		160	120			
−10	0	0	11	14	18	100
		100				
	140	290	270	150	80	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.4.28

U_i \ V_j	20	28	23	24	22	
0	0 140	0 180	27	0 0	0 80	400
—24	4	996	1	0 150	2	150
— 4	0	0 10	0 270	28	18	280
—10	0	0 100	11	14	18	100
	140	290	270	150	80	

În acest pas, întrucît în locul unei căsuțe care devine ocupată (2,4) două căsuțe (1,4) și (2,3) devin „locuri libere", avem un caz de degenerare. De aceea, pentru a putea calcula valorile U_i și V_j, vom considera una dintre cele două căsuțe devenite „libere", și anume căsuța (1,4), ocupată cu cantitatea zero. În felul acesta, soluția dată de tabelul 1.4.28 este optimă. Ca și în cazul precedent, diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, egale cu zero, corespunzătoare căsuțelor „libere" (3,1) și (4,1), indică posibilitatea determinării și a altor soluții de asemenea optime.

Totalul tonelor-km corespunzătoare soluției optime dată de tabelul 1.4.28 este de 16 770, deci cu 600 mai mult decît atunci cînd nu exista nici o restricție asupra cantităților de repartizat (soluția optimă din tabelul 1.4.21).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al V-lea

METODA DIFERENȚELOR COMPARATE

Am examinat pînă acum două metode de determinare a soluției optime pentru un plan de transport. Atît metoda distributivă cît și cea distributivă-modificată se caracterizează prin aceea că calculul începe cu determinarea unei soluții inițiale admisibile, pentru care se verifică optimalitatea. În cazul în care soluția găsită nu este cea optimă, se îmbunătățește succesiv pînă la obținerea acesteia.

În cele ce urmează vom examina *metoda diferențelor comparate*, care se deosebește principial de metodele descrise pînă acum.

În primul rînd, la această metodă, calculul nu începe prin determinarea unei soluții admisibile, ci inițial se determină o repartiție în care nu se ține seama de cantitățile disponibile la expeditor. Această repartiție se modifică apoi succesiv pînă cînd se ajunge la o soluție admisibilă a problemei. Această metodă de calcul asigură ca soluția admisibilă găsită să fie și optimă [1].

Vom expune această metodă cu ajutorul unui exemplu numeric. Să luăm, de pildă, o problemă de repartiție a cimentului de la 5 fabrici la 7 beneficiari. Datele problemei sînt prezentate în tabelul 1.5.01 (distanțele sînt reale):

Prima repartiție se determină dîndu-i fiecărui beneficiar întreaga cantitate necesară de la expeditorul cel mai apropiat, fără să ținem seama de cantitățile disponibile la acesta.

Procedînd în acest mod, se obține următoarea repartiție inițială: (vezi tabelul 1.5.02.).

După cum se vede din tabelul 1.5.02, expeditorului 1 nu i s-a repartizat nici o cantitate, expeditorilor 2 și 4 li s-au repartizat cu 50, respectiv 100 de unități mai puțin decît can-

[1] Vezi M. Altăr și D. Rădulescu, *O metodă de soluționare a problemelor de transport*, în *Studii de statistică*, 1962, (comunicări ținute la sesiunea științifică D.C.S., 29—30 noiembrie 1961).

Tabelul 1.5.01

Destinatari / Expeditori	Blaj 1	Buzău 2	Cîmpina 3	Miercurea-Ciuc 4	Ploiești 5	Tecuci 6	Tîrgu-Jiu 7	Cantitatea disponibilă
1 Bacău	502	174	279	217	249	102	608	400
2 Brăila	488	100	205	295	175	92	505	500
3 Brașov	209	179	74	95	116	289	404	500
4 București	397	146	110	279	89	251	330	800
5 Turda	81	469	364	272	406	459	261	600
Cantitatea necesară	200	250	800	100	700	200	550	2 800

Tabelul 1.5.02

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	6	7	Cantitatea repartizată	Cantitatea disponibilă	Diferențe
1								0	400	—400
2		250				200		450	500	— 50
3			800	100				900	500	+400
4					700			700	800	—100
5	200						550	750	600	+150
Cantitatea necesară	200	250	800	100	700	200	550	2 800	2 800	0

titatea disponibilă, iar expeditorilor 3 și 5 li s-au repartizat cu 400, respectiv 150 de unități mai mult decît cantitatea disponibilă.

În cele ce urmează vom numi *expeditori suprasolicitați* expeditorii cărora li s-a repartizat o cantitate mai mare decît cantitatea disponibilă, *expeditori subsolicitați* pe cei cărora li s-a repartizat o cantitate mai mică decît disponibilul lor, iar *expeditori exact solicitați* pe cei cărora li s-a repartizat o cantitate egală cu disponibilul lor.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în tabelul 1.5.02 expeditorii 3 şi 5 sînt suprasolicitaţi, iar expeditorii 1, 2 şi 4 sînt expeditori subsolicitaţi, expeditori exact solicitaţi neexistînd în această repartiţie.

După această repartiţie iniţială, dacă ea nu constituie un plan admisibil (nu ţine seama de disponibilul expeditorilor), se trece la modificarea ei. Modificările vor fi astfel făcute, încît totalul tonelor-km (sau al cheltuielilor de transport) să crească cît mai puţin posibil. Modul de determinare a celor mai convenabile modificări va rezulta din soluţionarea exemplului ales.

Pentru ca repartiţia din tabelul 1.5.02 să devină un plan admisibil, este necesar ca o parte din cantităţile repartizate expeditorilor 3 şi 5 (expeditori suprasolicitaţi) să fie redistribuite expeditorilor 1, 2 şi 4.

Vom începe cu expeditorul 3, căruia în tabelul 1.5.02 i-au fost repartizaţi beneficiarii 3 şi 4. Deci o parte din cantitatea repartizată iniţial de la expeditorul 3 acestor beneficiari va trebui să fie primită de la expeditorii 1, 2 sau 4.

Dintre expeditorii subsolicitaţi 1, 2 şi 4, cel mai apropiat de destinatarul 3 este expeditorul 4. Dacă destinatarul 3 va fi luat de la expeditorul 3 şi repartizat expeditorului 4, diferenţa de distanţă este 110 — 74 = 36 km.

Pentru destinatarul 4, cel mai apropiat expeditor subsolicitat este 1. Dacă acest destinatar va fi repartizat expeditorului 1 şi nu expeditorului 3, atunci diferenţa de distanţă va fi 217 — 95 = 122 km. Se vede deci că prima modificare este mai convenabilă decît a doua, ea ducînd la o creştere a distanţei de numai 36 km faţă de 122 km. Deci, pentru descongestionarea expeditorului 3, vom transfera o anumită cantitate a beneficiarului 3 expeditorului 4. Întrucît expeditorul 4 mai poate livra încă 100 de unităţi, îl vom face să livreze această cantitate beneficiarului 3. Astfel noua repartiţie va fi:

Tabelul 1.5.03

	1	2	3	4	5	6	7	
1								
2		250				200		450
3			700	100				800
4			100		700			800
5	200						550	750
	200	250	800	100	700	200	550	

În repartiția din tabelul 1.5.03 avem următoarea situație:

— expeditori suprasolicitați . . . . . 3 și 5;
— expeditori subsolicitați . . . . . 1 și 2;
— expeditori exact solicitați . . . . . 4.

Existînd și expeditori exact solicitați, determinarea noilor modificări trebuie să fie făcută ținînd seama și de aceștia. În acest scop, expeditorii exact solicitați vor fi considerați fie expeditori subsolicitați, fie expeditori suprasolicitați. Aceasta trebuie înțeleasă în sensul că, în cazul în care unui expeditor exact solicitat i se va repartiza să livreze suplimentar o anumită cantitate, el nu va mai livra cantitatea respectivă unuia dintre beneficiarii pe care-i aproviziona înainte.

Considerînd în continuare expeditorul 3, care rămîne suprasolicitat, vom căuta modificarea cea mai convenabilă care permite descongestionarea acestuia. Și în repartiția din tabelul 1.5.03 expeditorul 3 aprovizionează beneficiarii 3 și 4. Pentru beneficiarul 3, cel mai apropiat expeditor subsolicitat este expeditorul 2, diferența de distanță fiind $205-74 = 131$; pentru destinatarul 4, cel mai apropiat expeditor subsolicitat este expeditorul 1, diferența de distanță fiind $217-95 = 122$. Deci cea mai convenabilă modificare este a doua. De asemenea trebuie să verificăm dacă prin intermediul expeditorului exact solicitat 4, nu putem găsi o modificare mai convenabilă (care să corespundă unei diferențe mai mici decît cea de 122 km).

Dintre destinatarii 3 și 4, care în tabelul 1.5.03 erau repartizați expeditorului 3, cel mai convenabil este să transferăm pe primul (adică pe 3) expeditorului 4. Această modificare conduce la o diferență de distanță de $110-74 = 36$ km (față de $279-95 = 184$ km, care corespunde beneficiarului 4).

Dacă expeditorului 4 i s-ar repartiza o cantitate suplimentară, atunci el ar deveni suprasolicitat, adică tocmai ce trebuie să evităm. Pentru aceasta, cantitatea repartizată suplimentar nu va mai putea fi livrată unuia dintre vechii săi beneficiari. În repartiția din tabelul 1.5.03, expeditorului 4 îi sînt repartizați beneficiarii 3 și 5. Or, cel mai apropiat expeditor subsolicitat pentru destinatarul 5 este 2. Făcînd ca beneficiarul 5 să primească o cantitate de la expeditorul 2, diferența de distanță ar fi $175-89 = 86$ km. Rezultă că, în total, prin intermediul expeditorului exact solicitat 4, diferența de distanță care ar corespunde modificărilor respective ar fi de $36 + 86 = 122$ km, adică aceeași ca în cazul transferării directe a beneficiarului 4 de la expeditorul 3 la expeditorul 1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se poate, este bine să se facă ambele modificări. Or, în cazul nostru acest lucru este posibil.

În ceea ce privește modificarea directă, se vede că cele 100 de unități ale beneficiarului 4 se pot transfera integral expeditorului 1.

După efectuarea primei modificări, expeditorul 3 va trebui să livreze 700 de unități beneficiarului 3, continuînd să fie suprasolicitat cu 200 de unități. În ceea ce privește modificarea a doua, beneficiarul 3 poate fi transferat de la expeditorul 3 la expeditorul 4 cu cele 200 de unități, ceea ce ar face ca expeditorul 3 să nu mai fie suprasolicitat. Întrucît expeditorul 4 este exact solicitat cu aceeași cantitate, beneficiarul 5 trebuie transferat expeditorului 2. Or, această modificare nu este posibilă, deoarece expeditorul 2 mai poate livra numai 50 de unități. Rezultă că modificarea a doua se poate face numai pentru 50 de unități.

Efectuînd ambele modificări, noua repartiție este :

Tabelul 1.5.04

	1	2	3	4	5	6	7	
1				100				100
2		250			50	200		500
3			650					650
4			150		650			800
5	200						550	750
	200	250	800	100	700	200	550	

Conform acestei repartiții avem :

— expeditori suprasolicitați . . . . . 3 și 5 ;
— expeditori subsolicitați . . . . . 1 ;
— expeditori exact solicitați . . . . . 2 și 4.

Pentru descongestionarea expeditorului 3, transferînd o cantitate necesară beneficiarului 3 la expeditorul 1, singurul subsolicitat, distanța crește cu $279 - 74 = 205$ *km*.

În continuare vom cerceta dacă prin intermediul expeditorilor exact solicitați 2 și 4 se pot găsi modificări mai convenabile. După cum am văzut, dacă beneficiarului 3 va livra expeditorul 4 o anumită cantitate și dacă, în continuare, pe bene-

Scanned with OKEN Scanner

ficiarul 5 îl vom transfera de la expeditorul 4 la expeditorul 2, atunci distanța va crește cu 122 km. Deoarece acesta din urmă a devenit acum expeditor exact solicitat, un anumit destinatar repartizat lui în tabelul 1.5.04 va trebui transferat expeditorului subsolicitat 1.

Comparînd apoi tabelul 1.5.04 cu tabelul 1.5.01, observăm că cel mai convenabil este să transferăm pe destinatarul 6 de la expeditorul 2 la expeditorul 1. Prin această modificare distanța ar crește cu încă $102 - 92 = 10$ km, iar în total distanța ar crește cu $122 + 10 = 132$ *km*.

După cum se poate constata încercînd și celelalte modificări, nu există nici o altă posibilitate care să ducă la descongestionarea expeditorului 3 și să aibă ca efect o creștere a distanței cu mai puțin decît 132 km. (Modificarea directă ar fi dus la o creștere de 205 km.) Vom modifica deci cu 150 de unități — cantitate cu care mai este suprasolicitat expeditorul 3 — și vom obține o nouă repartiție:

Tabelul 1.5.05

	1	2	3	4	5	6	7	
1				100		150		250
2		250			200	50		500
3			500					500
4			300		500			800
5	200						550	750
	200	250	800	100	700	200	550	

Din acest tabel rezultă:

— expeditori suprasolicitați... 5;
— expeditori subsolicitați... 1;
— expeditori exact solicitați: 2, 3 și 4.

Întrucît expeditorul 3 a devenit exact solicitat, urmează să găsim cele mai avantajoase modificări care să permită descongestionarea expeditorului 5, rămas suprasolicitat.

Dacă o anumită cantitate a unui beneficiar care în tabelul 1.5.05 a fost repartizată expeditorului 5 ar fi transferată direct expeditorului subsolicitat 1, atunci cel mai avantajos ar fi să-l transferăm pe beneficiarul 7, diferența de distanță fiind de $608 - 261 = 347$ km.

Scanned with OKEN Scanner

Prin intermediul expeditorilor exact solicitați avem posibilitatea de a efectua următoarele modificări:

1. Prin intermediul expeditorului 4. Pentru descongestionarea expeditorului 5 pe seama expeditorului 4, se vede ușor că cel mai avantajos este să transferăm o parte din cantitatea beneficiarului 7, iar diferența de distanță va fi 330 — — 261 = 69 km. Cantitatea care va fi livrată de expeditorul 4 beneficiarului 7 nu va mai putea fi livrată beneficiarilor 3 sau 5, care urmează să primească cantitatea respectivă de la expeditorul 1. Și mai avantajos este dacă transferăm beneficiarul 5 expeditorului 1, diferența de distanță fiind 249 — 89 = 160 km. În total, diferența de distanță după aceste modificări va fi de 160 + 69 = *229 km*, deci mai mică decît în cazul modificării directe.

2. Prin intermediul expeditorului 3. Cel mai avantajos este de a transfera de la expeditorul 5 la expeditorul 3 o cantitate a beneficiarului 1, diferența de distanță fiind 209 — 81 = = 128 km. Cantitatea pe care expeditorul 3 ar livra-o suplimentar beneficiarului 1 nu ar mai putea fi livrată beneficiarului 3, acesta urmînd să primească cantitatea respectivă de la expeditorul 1, iar diferența de distanță va fi 279 — 74 = 205 km. În total, diferența de distanță corespunzătoare acestor modificări, ar fi 128 + 205 = *333 km*.

3. Prin intermediul expeditorului 2. Cel mai avantajos este să transferăm de la expeditorul 5 la expeditorul 2 pe beneficiarul 7, iar diferența de distanță va fi 505 — 261 = 244 km. De la expeditorul 2, care este exact solicitat, la expeditorul 1 este avantajos să-l transferăm pe beneficiarul 6, întrucît diferența de distanță este 102 — 92 = 10 km. În total, diferența de distanță este 244 + 10 = *254 km*.

4. Prin intermediul expeditorilor 4 și 2. Am văzut la punctul (1) că cel mai avantajos este să transferăm pe beneficiarul 7 de la expeditorul 5 la expeditorul 4, diferența de distanță fiind 69 km. De la expeditorul 4 la expeditorul 2, cel mai avantajos este să transferăm pe beneficiarul 5, diferența de distanță fiind 175 — 89 = 86 km; și, în sfîrșit, de la expeditorul 2 la expeditorul 1, după cum s-a văzut, cel mai convenabil este să transferăm pe beneficiarul 6, întrucît diferența de distanță este 10 km. În total, diferența de distanță este 69 + 86 + 10 = = *165 km*.

După cum putem constata, această modificare este cea mai convenabilă, întrucît ea este mai avantajoasă chiar decît modificările (1), (2), (3), deja încercate, și, de asemenea, decît modificările prin intermediul expeditorilor 4 și 3, al expedito-

Scanned with OKEN Scanner

rilor 2 şi 4, al expeditorilor 2 şi 3, al expeditorilor 3 şi 4, al expeditorilor 3 şi 2, al expeditorilor 4, 3 şi 2, al expeditorilor 4, 2 şi 3, al expeditorilor 3, 4 şi 2, al expeditorilor 3, 2 şi 4, al expeditorilor 2, 3 şi 4 şi, în sfîrşit, al expeditorilor 2, 4 şi 2.

După cum se vede, numărul modificărilor posibile este mare. Pentru determinarea celei mai avantajoase modificări nu este însă nevoie să cercetăm toate acestea. Astfel, de pildă, după cum s-a văzut, prin transferarea unei cantităţi de la expeditorul suprasolicitat 5, la expeditorul exact solicitat 2, diferenţa de distanţă este de 244 km, în timp ce prin transferarea unei cantităţi de la expeditorul 5 la expeditorul 4 şi de la acesta la expeditorul 2 se obţine o diferenţă de $69 + 86 = 155$ *km*.

Aceasta face să nu mai fie necesară cercetarea modificărilor prin intermediul expeditorilor 2 şi 4 ; 2 şi 3 ; 2, 3 şi 4 ; 2, 4 şi 3, ştiind de la început că prima este mai puţin avantajoasă decît modificarea prin intermediul expeditorilor 4 şi 2, iar celelalte mai puţin avantajoase decît modificarea prin intermediul expeditorilor 4, 2 şi 3. Acest exemplu ilustrează cum, după o anumită obişnuinţă în calcul, numărul modificărilor ce se cercetează poate fi mult redus.

Revenind la modificarea cea mai avantajoasă a repartiţiei din tabelul 1.5.05, care corespunde diferenţei de 165 km, avem : beneficiarul 7 poate primi 150 de unităţi de la expeditorul 4, aşa încît expeditorul 5 n-ar mai fi suprasolicitat ; beneficiarul 5 poate primi 150 de unităţi de la expeditorul 2 în loc de 4, dar beneficiarul 6 nu mai poate primi decît cel mult 50 de unităţi de la expeditorul 1 în loc de 2. Rezultă deci că modificările nu se pot face decît cu 50 de unităţi. Noua repartiţie este :

Tabelul 1.5.06

	1	2	3	4	5	6	7	
1				100		200		300
2		250			250			500
3			500					500
4			300		450		50	800
5	200						500	700
	200	250	800	100	700	200	550	

Scanned with OKEN Scanner

Şi în această repartiţie expeditorul 5 continuă să fie suprasolicitat.

Din nou trebuie să determinăm cea mai convenabilă modificare. Observăm că în repartiţiile din tabelele 1.5.05 şi 1.5.06 toţi expeditorii livrează aceloraşi beneficiari, cu excepţia expeditorului 2, care nu mai livrează nici o cantitate beneficiarului 6. Aceasta ne permite să folosim calculele făcute în etapa precedentă. Astfel, transferării directe a unei cantităţi a beneficiarului 7 de la expeditorul 5 la expeditorul 1 îi va corespunde aceeaşi diferenţă de distanţă, şi anume 347 km. Modificărilor (1) şi (2) din etapa precedentă le vor corespunde, de asemenea, aceleaşi diferenţe de distanţă. Diferenţa de distanţă corespunzătoare transferărilor (3) şi (4) se modifică, deoarece, de data aceasta, de la expeditorul 2 la expeditorul 1 cel mai avantajos este să-l transferăm pe beneficiarul 2, diferenţa de distanţă fiind $174 - 100 = 74$ km. Deci modificării (3), de data aceasta, îi corespunde o diferenţă de $244 + 74 = 318$ km, iar modificării (4) o diferenţă de $69 + 86 + 74 = 229$ km.

Modificarea cea mai convenabilă în această etapă este cea care duce la diferenţa de distanţă de 229 km şi care corespunde atît modificării (1), cît şi modificării (4).

Efectuînd modificarea (1) cu 100 de unităţi, cantitate cu care mai este suprasolicitat expeditorul 5, obţinem :

Tabelul 1.5.07

	1	2	3	4	5	6	7	
1				100	100	200		400
2		250			250			500
3			500					500
4			300		350		150	800
5	200						400	600
	200	250	800	100	700	200	550	

Repartiţia din tabelul 1.5.07 este o soluţie admisibilă şi deci optimă.

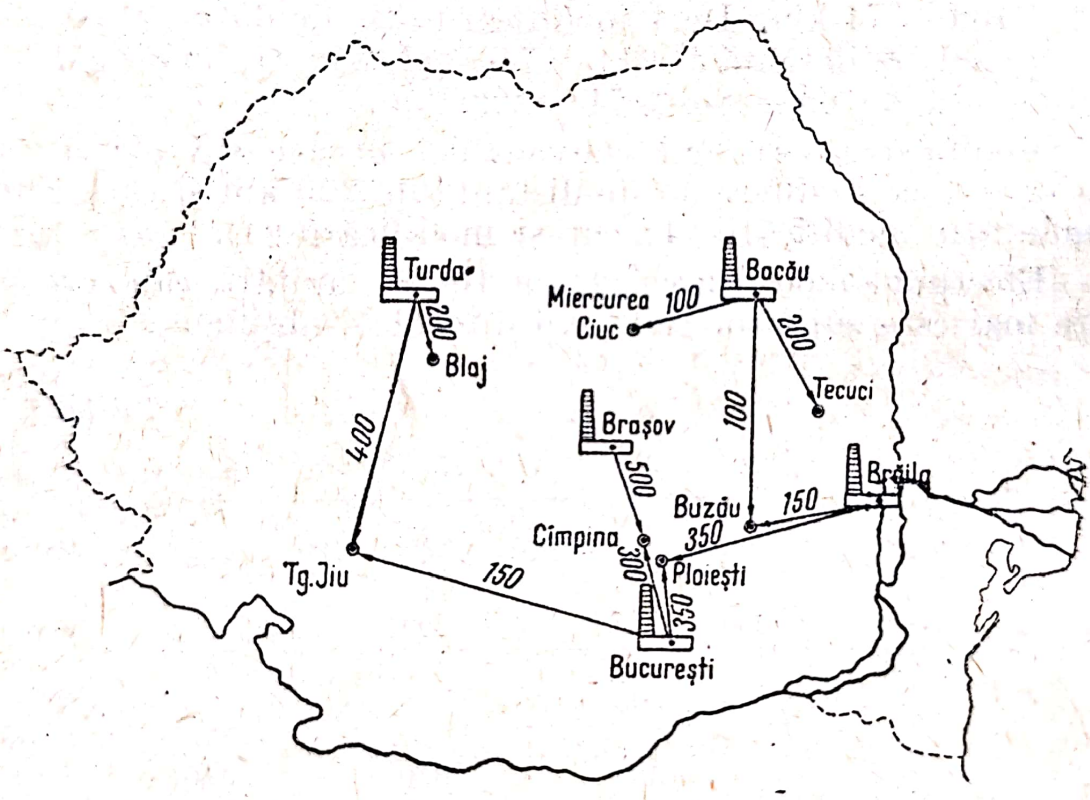
Totalul corespunzător acestei soluţii este de 407 000 t/km.

De asemenea, tot o soluţie optimă obţinem şi efectuînd modificarea (4). Astfel avem :

Tabelul 1.5.08

	1	2	3	4	5	6	7	
1		100		100		200		400
2		150			350			500
3			500					500
4			300		350		150	800
5	200						400	600
	200	250	800	100	700	200	550	

Totalul corespunzător acestei soluții este tot de 407 000 t/km. Ultima soluție este reprezentată în graficul 1.5.01 :



Graficul 1.5.01

Notă. Cu ajutorul metodei diferențelor comparate au fost soluționate manual [1] mai multe probleme concrete de dimensiuni mari, ca : problema aprovizionării cu lemne de foc a regiunii București (15 expeditori și 23 de destinatari) ; problema desfacerii cimentului la nivelul economiei naționale pe trimestrul I/1962 (7 expeditori și 212 destinatari) și pe trimestrul II/1962 (7 expeditori și 240 de destinatari) și altele.

[1] La data soluționării nu existau în țară mașini electronice de calcul cu capacități corespunzătoare pentru rezolvarea unor probleme de dimensiuni mari.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul soluționării unor probleme de dimensiuni mari este recomandabil ca pentru fiecare expeditor suprasolicitat sau exact solicitat să se deschidă cîte o fișă de diferențe, în care pe linii se trec toți expeditorii subsolicitați și exact solicitați, iar pe coloane se trec beneficiarii expeditorului respectiv. În această fișă se scriu diferențele de distanță (sau costul unitar) corespunzătoare transferării unei cantități de la beneficiar respectiv la unul dintre expeditorii subsolicitați sau exact solicitați. În partea a doua a fișei se trec diferențele minime din fiecare linie. După fiecare modificare, fișele de diferențe trebuie adaptate noii situații.

De pildă, în cazul repartiției din tabelul 1.5.05 avem următoarele tabele :

Pentru expeditorul exact solicitat 2

E \ D	2	5	6	Diferența minimă
1	174—100=74	249—175=74	102—92=10	10
3	179—100=79	116—175=—59	289—92=197	—59
4	146—100=46	89—175=—86	251—92=159	—86

Pentru expeditorul exact solicitat 3

E \ D	3	Diferența minimă
1	279—74=205	205
2	205—74=131	131
4	110—74=36	36

Pentru expeditorul exact solicitat 4

E \ D	3	5	Diferența minimă
1	279—110=169	249—89=160	160
2	205—110=95	175—89=86	86
3	74—110=36	116—89=27	—36

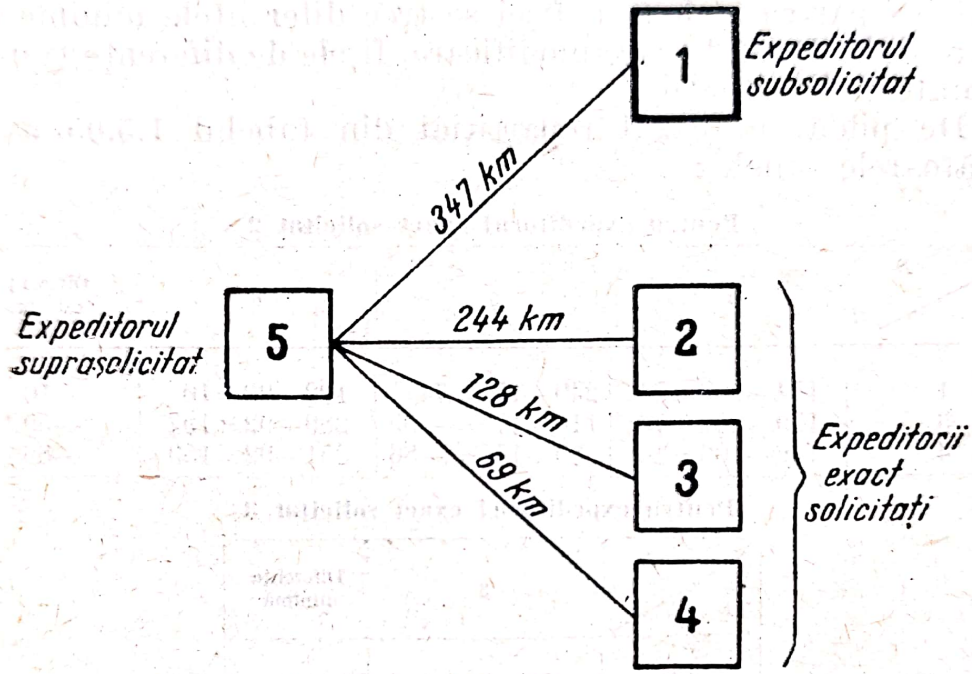
Pentru expeditorul suprasolicitat 5

E \ D	1	7	Diferența minimă
1	502—81=421	608—261=347	347
2	488—81=407	505—261=244	244
3	209—81=128	404—261=143	128
4	397—81=316	330—261=69	69

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea modificărilor care să corespundă celei mai mici creşteri a distanţelor (a costului), procedeul este următorul.

Se construieşte un grafic pentru fiecare expeditor suprasolicitat, în care sînt arătate diferenţele minime în cazul transferării unor destinatari de la acest expeditor la expeditorii subsolicitaţi şi exact solicitaţi (acestea se iau din fişele de diferenţe — din coloana de diferenţă minimă):



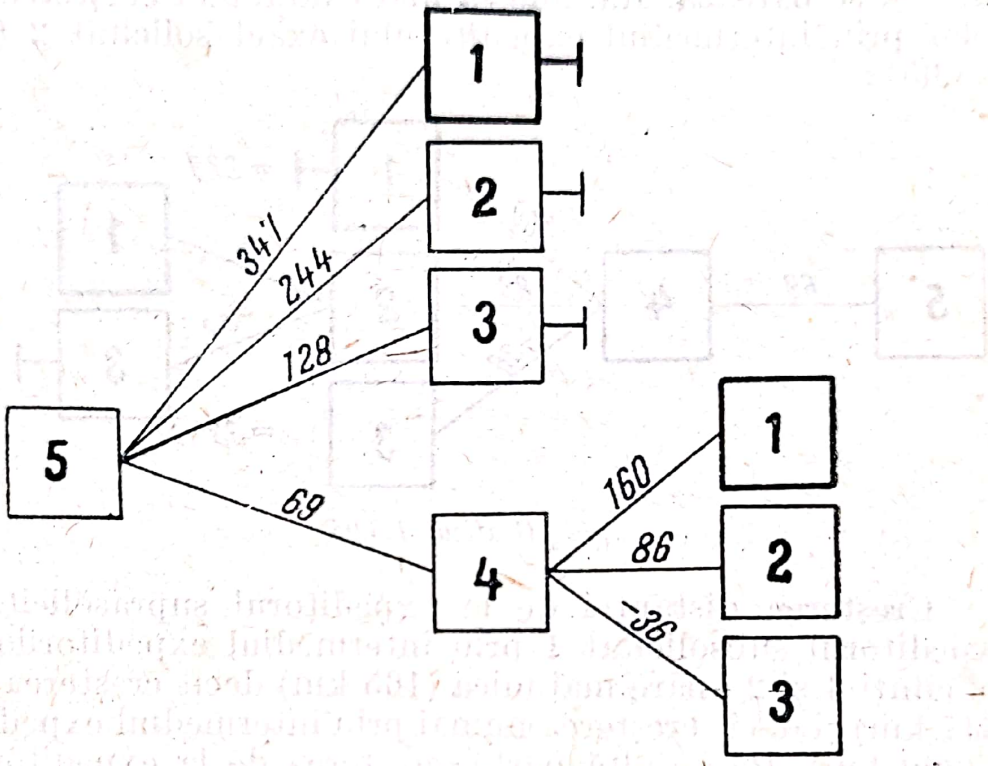
Graficul 1.5.02

Se examinează pentru fiecare expeditor exact solicitat dacă nu cumva creşterea distanţei de la expeditorul suprasolicitat 5 la expeditorul subsolicitat 1 este mai mică prin intermediul expeditorilor exact solicitaţi decît prin transferarea directă (a destinatarului 7) de la expeditorul 5 la expeditorul 1 (347 km). Este recomandabil să începem examinarea cu expeditorul exact solicitat, la care creşterea distanţei este cea mai mică (în cazul nostru expeditorul 4).

Diferenţele minime în cazul transferării unor destinatari de la expeditorul exact solicitat 4 la expeditorul subsolicitat 1 şi la expeditorii exact solicitaţi 2 şi 3 sînt date în graficul 1.5.03. Din acest grafic se vede că creşterea distanţelor de la expeditorul suprasolicitat 5 la expeditorul subsolicitat 1 şi la expeditorii exact solicitaţi 2 şi 3 este mai mică dacă se face transferul unor destinatari prin intermediul expeditorului 4 decît prin transferarea directă de la expeditorul 5 la expeditorii 1, 2 şi 3. În consecinţă, trecerile directe nu se mai iau în consi-

Scanned with OKEN Scanner

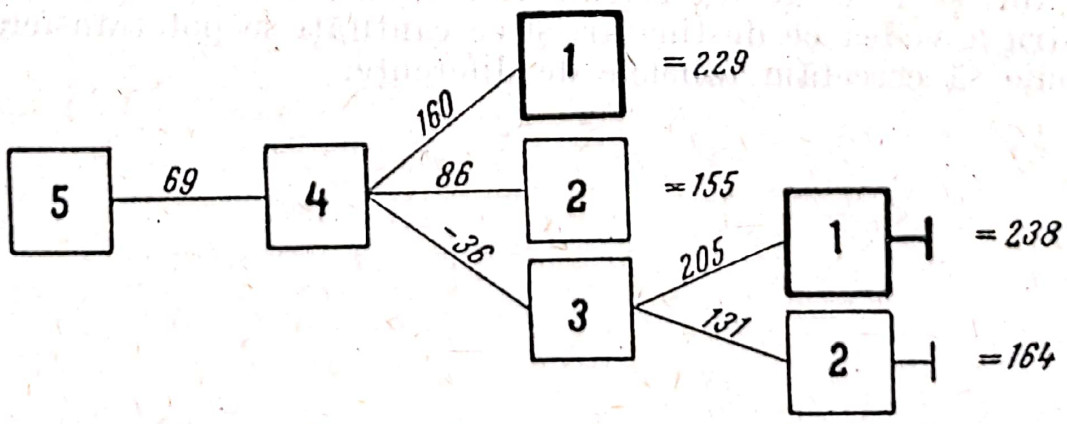
derație (se barează) și se examinează mai departe transferurile cantităților de la expeditorul suprasolicitat prin intermediul expeditorului exact solicitat 4.



Graficul 1.5.03

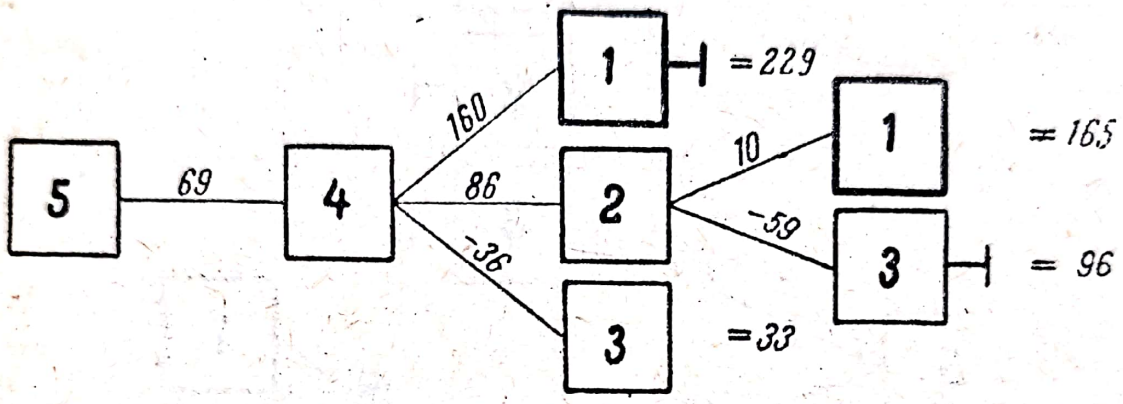
Ca primă concluzie, creșterea distanței de la expeditorul suprasolicitat 5 la expeditorul subsolicitat 1 s-a redus de la 347 km la 229 km.

În continuare vom examina dacă această creștere nu poate fi și mai mică prin intermediul expeditorilor exact solicitați 2 și 3. În acest scop vom construi un nou grafic, ținînd seama de relațiile expeditorului exact solicitat 3 cu expeditorul subsolicitat 1 și cu cel exact solicitat 2 (graficul 1.5.04):



Graficul 1.5.04

Întrucît creşterile distanţelor prin intermediul expeditorului exact solicitat 3 sînt mai mari decît creşterile directe de la expeditorul 4 la expeditorii 1 şi 2, ele nu se iau în consideraţie şi se barează. Rămîne să mai examinăm creşterea distanţelor prin intermediul expeditorului exact solicitat 2 (graficul 1.5.05) :



Graficul 1.5.05

Creşterea distanţei de la expeditorul suprasolicitat 5 la expeditorul subsolicitat 1 prin intermediul expeditorilor exact solicitaţi 4 şi 2 apare mai mică (165 km) decît creşterea directă (347 km) şi decît creşterea numai prin intermediul expeditorului 4 (229 km). Pe de altă parte, creşterea de la expeditorul 5 la expeditorul 3 prin intermediul expeditorilor 4 şi 2 (114 km) este mai mare decît creşterea numai prin intermediul expeditorului 4 (33 km). Cum însă am constatat din graficul precedent că transferurile prin intermediul expeditorului 3 nu duc la scurtarea distanţei, graficul nostru s-a încheiat.

Cu ajutorul acestui grafic s-a găsit că cea mai mică creştere a distanţelor are loc în cazul transferării unei cantităţi de la expeditorul suprasolicitat 5 la expeditorul exact solicitat 4 (69 km), de la acest expeditor la expeditorul exact solicitat 2 (86 km) şi de la acesta la expeditorul subsolicitat 1 (10 km). Pentru a vedea ce destinatari şi ce cantităţi se pot transfera, trebuie să cercetăm tabelele de diferenţe.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al VI-lea

METODA APROXIMATIVĂ A DIFERENȚELOR MAXIME

(METODA VOGEL)

Metodele prezentate pînă acum pentru soluționarea problemei de transport conduc după un număr de pași la soluția optimă. Dezavantajul acestor metode constă în faptul că, în general, ele necesită un mare volum de calcule, care, în cazul unor probleme de dimensiuni mari, practic nu se pot efectua decît cu ajutorul mașinilor electronice.

Pentru reducerea volumului de calcule, de un real folos sînt așa-numitele metode aproximative, adică metodele de calcul care nu dau totdeauna soluția optimă, dar care din punctul de vedere al necesităților practice conduc totuși la o soluție suficient de bună. Dacă se urmărește obținerea unei soluții optime, soluția găsită printr-o metodă aproximativă trebuie verificată și îmbunătățită cu ajutorul metodei distributive sau al celei distributive-modificate, cu alte cuvinte ea poate servi ca o soluție inițială.

Una dintre cele mai cunoscute metode aproximative de soluționare a problemei de transport este *metoda diferențelor maxime*, elaborată de V. Vogel (denumită și metoda aproximativă a lui Vogel). Vom examina această metodă cu ajutorul unui exemplu ale cărui date sînt indicate în tabelul care urmează :

Tabelul 1.6.01

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Cantitatea disponibilă
1	5	7	12	35
2	11	6	9	45
3	14	10	2	50
Cantitatea necesară	60	40	30	130

Metoda aproximativă a lui Vogel constă în următoarele:

Se pleacă de la tabelul anterior, introducîndu-se o coloană și o linie suplimentară denumite coloană de diferențe și, respectiv, linie de diferențe.

Tabelul 1.6.02

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Coloana de diferențe	Cantitatea disponibilă
1	5	7	12		35
2	11	6	9		45
3	14	10	2		50
Linia de diferențe					
Cantitatea necesară	60	40	30		130

Întrucît se caută o soluție care să corespundă unor cheltuieli de transport cît mai reduse, pentru fiecare coloană a tabelului se alege costul (distanța) cel mai mic. Acesta se scade apoi din costul imediat superior al coloanei respective, iar rezultatul se trece în linia de diferențe, în dreptul coloanei respective. Să considerăm, de exemplu, coloana 1. Pe această coloană, costul cel mai mic este 5, următorul fiind 11. Diferența dintre acestea este 6. Acest număr va fi trecut în linia de diferențe, în dreptul coloanei 1. Tot astfel se procedează pentru toate coloanele, pînă cînd se completează toată linia de diferențe. De asemenea, pentru fiecare linie se alege costul cel mai mic, care se scade din costul imediat superior, rezultatul trecîndu-se în coloana de diferențe, în dreptul liniei respective. Toate aceste diferențe calculate apar în tabelul 1.6.03.

După stabilirea tuturor diferențelor se alege cel mai mare număr din coloana și linia de diferențe. În cazul nostru, cea mai mare diferență este 8, aflată pe coloana de diferențe, în dreptul liniei 3. Fixîndu-ne asupra liniei 3, vom alege cel mai mic cost, care este 2. În căsuța respectivă (3, 3) vom trece cantitatea maximă ce se poate repartiza. Această cantitate se determină luîndu-se cea mai mică cantitate dintre disponibilul liniei 3 (50) și necesarul coloanei 3 (30). Vom trece deci numărul 30 în tabelul 1.6.04, în căsuța (3, 3) și îl vom înscrie într-un chenar. În acest fel, necesarul din coloana 3 este satisfăcut și deci în linia de diferențe, în dreptul acestei coloane,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.6.03

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Coloana de diferențe	Cantitatea disponibilă
1	5	7	12	2	35
2	11	6	9	3	45
3	14	10	2	8	50
Linia de diferențe	6	1	7		
Cantitatea necesară	60	40	30		130

vom scrie litera *S* (sfîrșit), pentru a ține seama că ea a ieșit din calcul.

Recalculăm apoi elementele liniei și coloanei de diferențe, nemailuînd în considerație numerele din coloana 3, și obținem tabelul 1.6.04, în care sînt trecute și noile diferențe.

Tabelul 1.6.04

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Coloana de diferențe	Cantitatea disponibilă
1	5	7	12	2	35
2	11	6	9	5	45
3	14	10	2 / 30	4	50
Linia de diferențe	6	1	*S*		
Cantitatea necesară	60	40	30		130

Diferența cea mai mare din tabelul 1.6.04 este 6 și corespunde coloanei 1, iar costul cel mai mic din această coloană este 5. Deci în căsuța respectivă (1, 1) vom repartiza cantitatea maximă posibilă, care în cazul nostru este 35 (vezi tabelul 1.6.05). În aceste condiții, în căsuțele liniei 1 nu se mai poate plasa nici o cantitate. Urmează deci ca în coloana de diferențe,

Scanned with OKEN Scanner

în dreptul liniei 1, să punem S. Recalculînd diferențele în continuare și eliminînd din calcul linia 1, vom obține:

Tabelul 1.6.05

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Coloana de diferențe	Cantitatea disponibilă
1	5 **35**	7	12	S	35
2	11	6	9	5	45
3	14	10	2 **30**	4	50
Linia de diferențe	3	4	S		
Cantitatea necesară	60	40	30		130

Diferența cea mai mare din acest tabel este 5 și se găsește în dreptul liniei 2. Costul cel mai mic din linia 2 este 6, corespunzător căsuței (2, 2). Urmează deci să se repartizeze în această căsuță cantitatea maximă, care este 40. Cu aceasta se satisface necesarul coloanei 2 și vom închide deci această coloană, marcînd-o în linia diferențelor cu S (vezi tabelul 1.6.06).

Tabelul 1.6.06

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Coloana de diferențe	Cantitatea disponibilă
1	5 **35**	7	12	S	35
2	11	6 **40**	9		45
3	14	10	2 **30**		50
Linia de diferențe	3	S	S		
Cantitatea necesară	60	40	30		130

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, au mai rămas de repartizat 5 unități de la expeditorul 2 și 20 de unități de la expeditorul 3. Destinatarii 2 și 3 fiind satisfăcuți, aceste cantități nu pot fi repartizate decît destinatarului 1. Se obține următoarea soluție finală :

Tabelul 1.6.07

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	Cantitatea disponibilă
1	35			35
2	5	40		45
3	20		30	50
Cantitatea necesară	60	40	30	130

În general, folosirea metodei Vogel duce la determinarea unui plan de transport apropiat de soluția optimă. În cazul exemplului nostru, simplificat, soluția obținută în final cu ajutorul acestei metode este chiar optimă, fapt de care se poate convinge cititorul aplicînd una dintre metodele amintite.

La soluționarea exemplului considerat s-a întocmit cîte un tabel de fiecare dată cînd se schimbau elementele liniei sau ale coloanei de diferențe. În practică, după însușirea tehnicii de obținere a soluției aproximative, se poate utiliza un singur tabel, unde în linia și în coloana de diferențe se trec, rînd pe rînd, toate diferențele.

Uneori, la determinarea unei soluții aproximative cu ajutorul metodei Vogel se poate întîmpla ca în coloana și linia de diferențe să apară două sau mai multe diferențe egale. În acest caz se va alege diferența care corespunde celui mai mic cost; iar cînd costurile sînt egale, se va alege căsuța care corespunde celei mai mari cantități ce poate fi repartizată.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al VII-lea

ALTE PROBLEME ECONOMICE CE SE POT REZOLVA CU MODELUL PROBLEMEI DE TRANSPORT

Modelul problemei de transport poate fi aplicat şi la o serie de alte probleme de repartiţie. Principalele probleme de acest gen se referă la :

— repartiţia optimă a sarcinilor pe maşini ;

— repartiţia sarcinilor de producţie pe întreprinderi ;

— repartiţia pe întreprinderi a sarcinii de producţie a unui produs omogen, ţinîndu-se seama de cheltuielile de producţie şi de transport ;

— problema de transport avînd drept criteriu minimizarea timpului de parcurs ;

— problema alegerii şi altele.

§ 1. Problema repartiţiei optime a sarcinilor pe maşini

O problemă de acest gen este următoarea [1] :

Într-o secţie sînt 4 maşini-unelte (I, II, III, IV), la care se pot confecţiona 6 piese (A, B, C, D, E şi F). Producţia pe oră a fiecărei maşini-unelte pentru fiecare piesă şi cheltuielile pentru fabricarea acestora sînt date în tabelul 1.7.01, care indică şi numărul pieselor care trebuie să fie fabricate, preţul de vînzare al acestora, precum şi fondul de timp disponibil al fiecărei maşini. Se cere să se determine repartiţia pieselor pe maşini în aşa fel, încît să se asigure fabricarea tuturor pieselor şi obţinerea unui beneficiu maxim.

Spre deosebire de problemele de aprovizionare-desfacere examinate în capitolele precedente, în această problemă indicatorii necesarului şi ai disponibilului nu sînt daţi în aceeaşi unitate de măsură. Cantităţile care trebuie produse (care corespund cantităţilor necesare în centrele de destinaţie în problema

[1] Vezi И. Я. Бирман, *Транспортная задача линейного программирования*, Издательство экономической литературы, Москва, 1962, стр. 132.

Tabelul 1.7.01

Piese	Cantităţi necesare (buc.)	Productivitatea maşinilor (bucăţi/oră)				Cheltuieli de producţie (unităţi monetare/buc.)				Preţ de vînzare (unităţi monetare/buc.)
		I	II	III	IV	I	II	III	IV	
A	200	18	20	10	16	2,5	2,0	4,0	3,0	5,1
B	150	45	50	25	40	1,2	1,0	1,7	1,5	2,0
C	400	9	10	5	8	0,65	0,6	1,0	0,7	1,5
D	600	27	30	15	—	4,0	3,0	4,5	—	6,8
E	420	9	10	5	8	3,0	2,6	3,2	3,4	4,0
F	150	—	75	—	—	—	1,8	—	—	3,0
Fond de timp disponibil (ore)		38	38,8	64	34,8					

de aprovizionare-desfacere) sînt date în bucăţi, pe cînd fondul de timp disponibil (care corespunde cantităţilor disponibile în centrele de expediţie) este dat în ore.

Pentru rezolvarea problemei este necesar deci ca cei doi indicatori să fie exprimaţi în aceeaşi unitate de măsură. În acest scop se ia o oră de lucru a unei maşini oarecare, egală cu o unitate, care se va denumi convenţional oră-maşină standard, iar maşina-unealtă respectivă se va numi maşină-standard.

În cazul nostru putem lua, de exemplu, maşina II ca maşină-standard, cu productivitatea cea mai mare, iar productivitatea celorlalte maşini o vom măsura prin productivitatea acestei maşini-standard, raportînd deci productivitatea maşinilor I, III şi IV la cea a maşinii II.

Astfel luînd producţia pe oră a maşinii-standard II egală cu unitatea, maşina I produce numai $\frac{18}{20} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} = \frac{27}{30} = 0{,}9$ unităţi, iar maşinile III şi IV produc, respectiv, 0,5 şi 0,8 unităţi. Deci cele 200 de piese A sînt fabricate de maşina II în $\frac{200}{20} = 10$ ore, sau, cu alte cuvinte, maşina II produce, după cum se vede din tabelul 1.7.01, 20 de bucăţi pe oră. Prin urmare, pentru fabricarea piesei A sînt necesare 10 ore-maşină standard. Pentru celelalte piese, necesarul de timp în ore-maşină standard va fi de:

pentru piesa B .... $\frac{150}{50} = 3$ ore-maşină standard;

pentru piesa C .... $\frac{400}{10} = 40$ de ore-maşină standard;

„ „ D .... $\frac{600}{30} = 20$ de ore-maşină standard;

„ „ E .... $\frac{420}{10} = 42$ de ore-maşină standard;

„ „ F .... $\frac{150}{75} = 2$ ore-maşină standard.

Am exprimat astfel „necesarul“ în ore-maşină standard. În continuare vom exprima şi „disponibilul“ în aceeaşi unitate de măsură. În acest scop, fondul de timp al fiecărei maşini-unelte, exprimat în ore, va fi înmulţit cu coeficienţii de reducere în ore-maşină standard, pe care i-am calculat mai sus. Astfel, fondul de timp al maşinii I este de 38 de ore. Într-o oră această maşină produce 0,9 unităţi de producţie faţă de o unitate de producţie fabricată de maşina-standard (II). Ca atare, fondul de timp al maşinii I, de 38 de ore, exprimat în ore-maşină standard, va fi de $38 \times 0{,}9 = 34{,}2$. Procedînd în mod analog, găsim că fondul de timp al maşinii III este de $64 \times 0{,}5 = 32$ de ore-maşină standard, iar al maşinii IV — de $34{,}8 \times 0{,}8 = 27{,}8$ ore-maşină standard.

Din tabelul 1.7.01 se mai observă că piesa F poate fi fabricată numai la maşina II. Prin urmare, ea se va scoate din calcul va fi repartizată direct maşinii II). În acest caz, fondul de timp al maşinii II luat în calcul se va micşora cu timpul necesar fabricării piesei F (care este egal cu $\frac{150}{75} = 2$ ore), adică el va fi egal cu $38{,}8 - 2 = 36{,}8$ ore-maşină standard.

Pentru soluţionarea problemei mai rămîne să se determine beneficiul ce se obţine într-o oră-maşină standard prin confecţionarea fiecărui tip de piesă la fiecare maşină-unealtă. Beneficiul pe bucată rezultă din tabelul 1.7.01 prin scăderea cheltuielilor de producţie din preţul de vînzare pentru fiecare produs şi maşină. Beneficiul astfel calculat este redat în partea din stînga a tabelului 1.7.02.

Partea dreaptă a tabelului (beneficiul pe o oră-maşină standard) s-a obţinut prin înmulţirea părţii din stînga cu productivitatea maşinii standard II. În dreptul piesei D, în coloana maşinii IV, s-a trecut zero, deoarece maşina IV nu poduce piesa D.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.02

Piese \ Mașini	Beneficiu pe bucată				Beneficiu pe o oră-mașină standard			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
A	2,6	3,1	1,1	2,1	52	62	22	42
B	0,8	1,0	0,3	0,5	40	50	15	25
C	0,85	0,9	0,5	0,8	8,5	9	5	8
D	2,8	3,8	2,3	—	84	114	69	0
E	1,0	1,4	0,8	0,6	10	14	8	6

Astfel vom construi tabelul cu datele necesare soluționării problemei.

Tabelul 1.7.03

Piese \ Mașini	I	II	III	IV	Fond de timp necesar (ore-mașină standard)
A	52	62	22	42	10
B	40	50	15	25	3
C	8,5	9	5	8	40
D	84	114	69	0	20
E	10	14	8	6	42
Fond de timp disponibil (ore-mașină standard)	34,2	36,8	32,0	27,8	115 / 130,8

Notînd cu x_{ij} $(i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4)$ timpul în ore-mașină standard folosit de mașina j pentru confecționarea piesei i, modelul matematic al problemei propuse va fi același cu modelul problemei obișnuite de transport, cu singura deosebire că pentru funcția de optimizat se va cere valoarea maximă (beneficiu maxim) și nu minimă. Soluționarea problemei se poate face cu ajutorul aceluiași metode de calcul. Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

avem o problemă de maximizare, criteriul de optim va fi invers decît în cazul problemei de minimizare a cheltuielilor de transport. Astfel, la soluționarea problemei prin metoda distributivă-modificată, o soluție va fi optimă cînd toate diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ vor fi negative sau nule. Dacă există diferențe pozitive, se alege cea mai mare diferență și se efectuează modificarea corespunzătoare ciclului respectiv.

Rezolvînd problema dată în tabelul 1.7.03 cu ajutorul uneia dintre metodele descrise în capitolele precedente, vom obține următoarea soluție optimă:

Tabelul 1.7.04

Piese \ Mașini	I	II	III	IV	Fond de timp necesar (ore-mașină standard)
A		10			10
B		3			3
C	12,2			27,8	40
D		20			20
E	22,0	3,8	16,2		42
Fond de timp disponibil (ore-mașină standard)	34,2	36,8	32,0	27,8	115 / 130,8

În soluția optimă (tabelul 1.7.04), toate mașinile sînt încărcate la capacitatea lor maximă, cu excepția mașinii III, unde au mai rămas disponibile 15,8 ore-mașină standard (diferența dintre fondul de timp disponibil și cel necesar).

Rămîne să transformăm rezultatele găsite în soluția optimă, exprimate în ore-mașină standard, în unitățile obișnuite (fondul de timp al mașinilor și numărul pieselor). Din tabelul 1.7.04 se vede că în soluția optimă piesele A sînt fabricate de mașina II în timp de 10 ore-mașină standard. Cum mașina II a fost luată ca mașină-standard, timpul de lucru al acestei mașini în ore obișnuite va fi, de asemenea, egal cu 10. Productivitatea acestei mașini fiind de 20 de piese A pe oră, în timp de 10 ore ea va produce 200 de piese A. La piesa B mașina II va lucra 3 ore, producînd $3 \times 50 = 150$ de piese; la piesa D ea va lucra 20 de ore și va produce $20 \times 30 = 600$ de piese, iar la piesa E va lucra 3,8 ore și va produce $3{,}8 \times 10 = 38$ de piese.

Scanned with OKEN Scanner

Mașina I va lucra la piesa C 12,2 ore-mașină standard, ceea ce echivalează cu $\frac{12,2}{0,9} = 13,6$ ore obișnuite. Această mașină va produce deci $\frac{12,2}{0,9} \times 9 = 122$ piese C. Aceeași mașină, fabricînd piesele E timp de 22,0 ore-mașină standard, va lucra $\frac{22,0}{0,9} = 24,4$ ore obișnuite și va produce $\frac{22,0}{0,9} \times 9 = 220$ de piese E.

Mașina III va lucra la piesele E timp de 16,2 ore-mașină standard, sau $\frac{16,2}{0,5} = 32,4$ ore obișnuite, cu o productivitate de 5 piese pe oră, fabricînd $32,4 \times 5 = 162$ de piese E.

Tabelul 1.7.05

Mașini / Piese	I	II	III	IV	Piese fabricate
A		10 ore / 200 de piese			200
B		3 ore / 150 de piese			150
C	13,6 ore / 122 de piese			34,8 ore / 278 de piese	400
D		20 ore / 600 de piese			600
E	24,4 ore / 220 de piese	3,8 ore / 38 de piese	32,4 ore / 162 de piese		420
F		2 ore / 150 de piese			150
Fond de timp folosit (ore)	38	38,8	32.4	34,8	
Fond de timp disponibil (ore)	38	38,8	64	34,8	

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrşit, maşina IV, lucrînd 27,8 ore-maşină standard la piesa C, sau $\frac{27,8}{0,8} = 34,8$ ore obişnuite, va produce $\frac{27,8}{0,8} \times 8 =$ $= 278$ de piese C.

Cu aceste date se întocmeşte tabelul cu soluţia definitivă (planul optim), exprimată în ore-lucru ale maşinilor şi în piese (vezi tabelul 1.7.05).

Această problemă a putut fi rezolvată cu metoda de soluţionare a problemei de transport tocmai pentru că mărimile care reprezintă productivitatea maşinilor pentru toate piesele sînt proporţionale. În realitate lucrurile nu stau totdeauna astfel. În calcul nu s-a luat în consideraţie timpul necesar pentru reglarea maşinilor cu ocazia schimbării pieselor de fabricat.

§ 2. Problema repartiţiei optime a sarcinilor de producţie pe întreprinderi

Ca şi în problema repartiţiei sarcinilor de producţie pe maşini, scopul problemei este tot maximizarea beneficiului. O astfel de problemă constă în următoarele :

Fiind date sarcina de producţie pe ramură (direcţie generală) pentru o serie de sortimente, capacităţile de producţie ale fiecărei întreprinderi din ramura respectivă, precum şi preţul de cost pe unitatea de produs la fiecare întreprindere, pentru fiecare sortiment, se cere să se repartizeze sarcinile de producţie pentru toate sortimentele pe întreprinderi, în aşa fel încît sarcinile de producţie să fie îndeplinite cu cheltuieli minime de producţie pe ramură. Este evident, că, în cazul unui nivel constant al producţiei preţului de cost minim îi va corespunde beneficiul maxim şi deci problema de maximizare poate fi transformată într-o problemă de minimizare.

Vom lua un exemplu numeric.

Să presupunem că în ramura bumbac sînt 6 ţesătorii, care produc 5 sortimente diferite. Datorită utilajului de productivitate diferită, productivităţii diferite a muncitorilor, organizării diferite a producţiei şi a muncii etc., preţul de cost pe m^2 diferă pentru fiecare sortiment de la o întreprindere la alta. Preţul de cost pe unitatea de produs (lei/m^2), capacităţile de producţie pe întreprinderi şi sarcinile de producţie fixate de direcţia generală respectivă pentru fiecare sortiment sînt arătate în tabelul 1.7.06.

Notînd cu x_{ij} $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,;\, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ cantitatea din sortimentul j ce se va produce de întreprinderea i, modelul matematic al problemei va fi acelaşi cu cel al problemei de transport obişnuite, şi în consecinţă ea poate fi rezolvată

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.06

Sortimente / Întreprinderi	1	2	3	4	5	Capacitatea de producție (mii m²)
1	20	25	40	44	60	100
2	23	34	42	45	58	120
3	28	32	45	48	55	300
4	21	30	40	42	52	230
5	29	29	48	51	51	400
6	25	34	45	53	62	580
Sarcina de producție (mii m²)	280	290	310	240	250	1730 / 1370

cu ajutorul oricăreia dintre metodele date în capitolele precedente. Sarcinile de producție fiind mai mici decît capacitățile de producție pe direcția generală, la rezolvarea problemei este necesar să se introducă o coloană cu un sortiment fictiv (coloana 6), avînd prețul de cost egal cu zero (în cazul folosirii metodei „diferențelor comparate", introducerea coloanei în plus nu este necesară).

Folosind una dintre metodele cunoscute, după un număr finit de iterații, vom ajunge la repartiția sarcinilor de producție pe întreprinderi, optimă din punctul de vedere al cheltuielilor de producție pe direcția generală, (arătată în tabelul 1.7.07).

Prețul de cost pe direcția generală va fi :

$$(100 \times 25) + (110 \times 42) + (10 \times 45) + (170 \times 32) +$$
$$+ (130 \times 55) + (230 \times 42) + (280 \times 19) + (120 \times 51) +$$
$$+ (20 \times 34) + (200 \times 45) = 50\,940\,000 \text{ de lei.}$$

Întrucît în problema considerată capacitatea disponibilă la cele 6 întreprinderi este mai mare decît sarcinile de producție, din soluția găsită a reieșit că întreprinderea 6 nu va lucra cu întreaga ei capacitate.

Problema repartiției sarcinilor de producție pe întreprinderi am examinat-o în mod simplificat. În practică această

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.07

(în mii m²)

Sortimente / Întreprinderi	1	2	3	4	5	Capacitatea de producție nefolosită	Capacitatea de producție
1		100					100
2			110	10			120
3		170			130		300
4				230			230
5	280				120		400
6		20	200			360	580
Sarcina de producție	280	290	310	240	250	360	1 730

problemă este mai complicată. Ea poate fi soluționată cu ajutorul metodei expuse numai dacă productivitatea utilajelor este aceeași pentru toate sortimentele.

§ 3. Problema repartiției optime a sarcinilor de producție a unui produs omogen între întreprinderile unei ramuri industriale, ținînd seama de cheltuielile de producție și de transport

În această problemă, repartiția optimă a sarcinilor de producție pe întreprinderi va depinde atît de prețul de cost al produsului respectiv în fiecare întreprindere, cît și de costul de transport al produsului finit pînă la destinație.

Să presupunem că 6 întreprinderi fabrică un produs omogen cu care trebuie să aprovizioneze 6 beneficiari din diferite localități. Cheltuielile de transport de la fiecare întreprindere la fiecare beneficiar, prețul de cost și capacitatea de producție a fiecărei întreprinderi, precum și necesarul fiecărui beneficiar, sînt arătate în tabelul 1.7.08.

Pe baza datelor din acest tabel se întocmește un altul (1.7.09) în care se trec costurile totale de producție și de transport. Datorită faptului că sarcinile de producție sînt mai mici decît capacitățile întreprinderilor, vom introduce un beneficiar fictiv (coloana 7).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.08

Beneficiari / Întreprinderi producătoare	Prețul de cost de transport (lei/tona)						Preț de cost al producției	Capacitatea de producție (t)
	1	2	3	4	5	6		
1	50	64	40	36	32	60	520	800
2	62	32	100	50	102	38	480	600
3	20	80	24	36	120	42	500	300
4	32	36	48	40	80	72	460	1 200
5	100	80	56	96	66	50	420	1 500
6	90	40	70	52	18	83	600	1 600
Necesarul beneficiarilor (t)	700	1000	700	400	1300	750	—	6000 / 4850

Tabelul 1.7.09

Beneficiari / Întreprinderi producătoare	1	2	3	4	5	6	7	Capacitatea de producție (t)
1	570	584	560	556	552	580	0	800
2	542	512	580	530	582	518	0	600
3	520	580	524	536	620	542	0	300
4	492	496	508	500	540	532	0	1 200
5	520	500	476	516	486	470	0	1 500
6	690	640	670	652	618	683	0	1 600
Necesarul beneficiarilor (t)	700	1 000	700	400	1 300	750	1 150	6 000

Scanned with OKEN Scanner

Soluția optimă a problemei va fi:

Tabelul 1.7.10

Beneficiari / Întreprinderi producătoare	1	2	3	4	5	6	7	Capacitatea de producție (t)
1					800			800
2		600						600
3	300							300
4	400	400		400				1 200
5			700		50	750		1 500
6					450		1 150	1 600
Necesarul beneficiarilor (t)	700	1 000	700	400	1 300	750	1 150	6 000

Cheltuielile totale de producție și de transport se vor ridica la 2 598 100 de lei.

În practică se poate întîmpla ca necesitățile să fie date nu pe localități, ci pe regiuni sau pe raioane. În acest caz trebuie calculată distanța medie ponderată de la fiecare întreprindere la fiecare regiune (raion). Ca ponderi pot fi folosite cantitățile consumate pe localități în cadrul fiecărei regiuni în perioadele precedente. Cheltuielile de transport vor fi cele care corespund distanței medii. Natural că rezultatul calculat în acest fel poate să nu reprezinte soluția optimă (datorită modificării proporțiilor de consum dintre diferite localități din regiune); aceasta va constitui totuși o soluție bună, aflată pe baza datelor existente.

§ 4. Problema de transport avînd drept criteriu minimizarea timpului de parcurs

Sînt unele probleme în care, în loc de minimizarea totalului tonelor-km (sau a cheltuielilor de transport), se cere găsirea celui mai mic total de tone-ore (vagoane-ore, camioane-ore

Scanned with OKEN Scanner

etc.)[1]. În acest caz, în modelul problemei, valorile c_{ij} vor reprezenta timpul de parcurs de la fiecare centru de expediție la fiecare centru de destinație, iar problema se rezolvă cu ajutorul uneia dintre metodele descrise pentru problema obișnuită de transport.

Ne propunem să minimizăm timpul total de transport pentru următoarea problemă, în care timpul de parcurs este dat în ore.

Tabelul 1.7.11

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	10	23	41	5	18	21	7
2	33	21	30	15	19	19	22
3	17	15	22	25	48	8	16
4	20	23	10	13	21	14	35
5	12	17	18	16	22	40	40
Autocamioane necesare	19	13	31	18	24	15	120

Aplicînd una dintre metodele cunoscute, vom determina soluția optimă indicată în tabelul 1.7.12.

Totalul camioanelor-ore în această soluție optimă este de 1 538.

Timpul maxim de transport se realizează de la expeditorul 5 la destinatarul 5 (căsuța 5, 5) și este egal cu 22 de ore. Se poate întîmpla ca acest timp maxim să nu fie acceptabil. Această situație are loc, de exemplu, la transportul alimentelor perisabile, al animalelor etc., cînd creșterea totalului de ore-camioane (sau a cheltuielilor de transport) este mai puțin importantă decît pierderile din cauza perisabilității.

Dacă, de pildă, transportul trebuie efectuat într-un număr mai mic (sau cel mult egal) de 20 de ore, atunci problema se

[1] Dacă se consideră numărul de tone-km proporțional cu numărul de tone-ore (adică se presupune aceeași viteză medie pe toate rutele), problema de mai sus se reduce la o problemă obișnuită de transport. Cum însă această situație nu are loc, în practică soluțiile optime găsite pe baza celor două criterii, în general, nu sînt identice.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.12

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	10	23	41	7 | 5	18	21	7
2	33	21	30	15	22 | 19	19	22
3	17	1 | 15	22	25	48	15 | 8	16
4	20	23	31 | 10	4 | 13	21	14	35
5	19 | 12	12 | 17	18	7 | 16	2 | 22	40	40
Autocamioane necesare	19	13	31	18	24	15	120

rezolvă punînd în mod arbitrar în căsuțele unde parcursul este mai mare de 20 de ore un număr foarte mare în raport cu celelalte (de exemplu 100), care va face ca în soluția optimă rutele corespunzătoare să nu fie folosite.

În acest caz, tabelul 1.7.11 devine:

Tabelul 1.7.13

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	10	100	100	5	18	100	7
2	100	100	100	15	19	19	22
3	17	15	100	100	100	8	16
4	20	100	10	13	100	14	35
5	12	17	18	16	100	100	40
Autocamioane necesare	19	13	31	18	24	15	120

Scanned with OKEN Scanner

Soluția optimă în condițiile puse este :

Tabelul 1.7.14

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	10	23	41	5 | 5	2 | 18	21	7
2	33	21	30	15	22 | 19	19	22
3	17	1 | 15	22	25	48	15 | 8	16
4	20	23	31 | 10	4 | 13	21	14	35
5	19 | 12	12 | 17	18	9 | 16	22	40	40
Autocamioane necesare	19	22	31	18	24	15	120

În această soluție, timpul maxim de parcurs s-a redus de la 22 de ore (căsuța 5, 5 a devenit liberă) la 19 ore (căsuța 2,5) și deci condiția pusă (ca timpul maxim individual de transport să fie cel mult 20 de ore) a fost îndeplinită. În schimb, numărul total de camioane-ore s-a majorat de la 1 538 la 1 552.

O problemă de alt gen se pune atunci cînd se cere să se reducă la minim timpul individual de parcurs în gol.

Pentru exemplificare vom considera următoarea problemă :

Tabelul 1.7.15

Garaje \ Santiere	Numărul minutelor de parcurs						Autocamioane disponibile
	1	2	3	4	5	6	
1	25	36	40	48	51	60	20
2	38	42	42	44	52	32	30
3	40	44	55	64	36	48	25
4	43	46	50	56	40	52	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

Scanned with OKEN Scanner

Soluția optimă din punctul de vedere al totalului autocamioane-minute, calculată în mod obișnuit, este:

Tabelul 1.7.16

Garaje \ Santiere	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	18 | 25	2 | 36	40	48	51	60	20
2	38	42	11 | 42	14 | 44	52	5 | 32	30
3	40	44	55	64	25 | 36	48	25
4	43	19 | 46	12 | 50	56	14 | 40	52	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

Totalul de autocamioane-minute rezultat din această soluție este de 4 694, iar timpul maxim individual de 50 minute (timpul de parcurs de la garajul 4 la șantierul 3).

Spre deosebire de cazul precedent, cînd s-a pus condiția ca timpul individual de parcurs să nu depășească o anumită limită (20 de ore), vom rezolva acuma problema în așa fel încît acesta să fie minim. În această situație, totalul autocamioane-minute va fi mai mare decît cel corespunzător soluției optime determinate după criteriul minimizării timpului total de parcurs. Procedeul folosit este cel dat de I. V. Romanovski [1].

Pornind de la soluția optimă (tabelul 1.7.16), se caută timpul maxim de parcurs din căsuțele ocupate, care în cazul exemplului luat este de 50 (căsuța 4, 3), și se întocmește un tabel nou (1.7.17), în care în căsuța corespunzătoare, în locul timpului real de parcurs (50 minute), se pune numărul 1; în căsuțele care corespund unui timp de parcurs mai mic se trece numărul zero, iar în restul căsuțelor (care corespund unui

[1] Vezi Е. П. Нестеров, *Транспортные задачи линейного программирования*, Всесоюзное издательско — полиграфическое объединение Министерства путей сообщения, Москва, 1962.

timp de parcurs mai mare decît 50 de minute) se trece un număr mare (de exemplu 100).

Problema se rezolvă în mod obișnuit, iar soluției optime a acestei probleme modificate îi va corespunde totalul autocamioanelor-minute egal cu zero. În tabelul 1.7.17, în afară de datele problemei modificate este arătată și una dintre soluțiile acestei probleme.

Tabelul 1.7.17

Garaje \ Șantiere	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	12 | 0	1 | 0	7 | 0	0	100	100	20
2	0	0	16 | 0	14 | 0	100	0	30
3	6 | 0	14 | 0	100	100	0	5 | 0	25
4	0	6 | 0	1	100	39 | 0	100	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

În această soluție, căsuța (4, 3) a rămas neocupată, iar timpul maxim de transport individual s-a redus de la 50 de minute la 48 de minute (căsuța 3, 6). În continuare vom încerca micșorarea și a acestui timp (48 de minute). Vom construi în acest scop un nou tabel, unde în căsuța (4, 3) vom înlocui 1 cu 100, iar în căsuțele (3,6 și 1,4), care corespund acum timpului maxim de parcurs (48 de minute), vom introduce numărul 1. Obținem astfel tabelul 1.7.18, în care este trecută și una dintre soluțiile optime cu totalul autocamioanelor-minute egal cu zero.

După cum se vede, căsuțele 1, 4 și 3, 6 au rămas neocupate, deci timpul maxim de transport s-a redus de la 48 de minute la 44 de minute (căsuța 2, 4 și 3, 2). Vom proceda mai departe după aceeași regulă: vom înlocui numărul 1 din căsuțele 1,4 și 3,6 cu 100 și vom introduce numărul 1 din căsuțele 2,4 și 3,2, care de această dată corespund timpului individual maxim. Datele noii probleme sînt date în tabelul 1.7.19.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.18

Garaje \ Șantiere	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	8 | 0	0	12 | 0	0	100	100	20
2	0	0	11 | 0	14 | 0	100	0	30
3	4 | 0	21 | 0	100	100	0	5 | 0	25
4	6 | 0	0	100	100	39 | 0	100	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

Tabelul 1.7.19

Garaje \ Șantiere	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	0	0	0	100	100	100	20
2	0	0	0	1	100	0	30
3	0	1	100	100	0	100	25
4	0	100	100	100	0	100	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

Datele din acest tabel nu mai ne dau posibilitatea de a găsi o soluție în care totalul autocamioanelor-minute să fie egal cu zero (în coloana 4 cantitatea necesară nu poate fi plasată în nici una dintre căsuțele cu timpul egal cu zero). Prin urmare, calculul s-a terminat, iar soluția din tabelul precedent (1.7.18) *este optimă din punctul de vedere al timpului individual minim.*

Scanned with OKEN Scanner

Timpul individual maxim de transport s-a redus astfel de la 50 de minute la 44 de minute. Natural, totalul autocamioanelor-minute nu mai este optim, el crescînd de la 4 694 (cît era în soluția optimă din tabelul 1.7.16) la 4 820 de autocamioane-minute.

Notă. În tabelul 1.7.18 este dată una dintre soluțiile optime din punctul de vedere al timpului individual. Există și alte soluții care, de asemenea, satisfac această condiție. Din toate aceste soluții poate fi aleasă aceea care corespunde celui mai mic număr de autocamioane-minute sau celor mai mici cheltuieli de transport[1]. În acest scop, zerourile din tabelul 1.7.18 se înlocuiesc cu timpii reali de transport, iar în locul lui 1 se pune 100 și problema se rezolvă apoi în mod obișnuit. Soluția optimă după acest al doilea criteriu (minimizarea totalului autocamioanelor-minute în condițiile timpului individual minim) este:

Tabelul 1.7.20

Garaje \ Șantiere	1	2	3	4	5	6	Autocamioane disponibile
1	8 | 25	36	12 | 40	48	51	60	20
2	38	42	11 | 42	14 | 44	52	5 | 32	30
3	40	21 | 44	55	64	4 | 36	48	25
4	10 | 43	46	50	56	35 | 40	52	45
Autocamioane necesare	18	21	23	14	39	5	120

În soluția de mai sus, totalul autocamioanelor-minute este de 4 816 față de 4 820 cît era în soluția dată de tabelul 1.7.18.

§ 5. Problema alegerii

Vom examina această problemă cu ajutorul unui exemplu.

Să presupunem că într-o secție a unei întreprinderi metalurgice sînt 5 mașini de tipuri diferite (A, B, C, D și E), fiecare

[1] Se presupune că cheltuielile sînt proporționale cu timpul de transport.

fiind deservită de cîte un muncitor. Datorită aptitudinilor individuale, productivitatea muncitorilor la fiecare mașină este diferită, după cum se poate vedea din următorul tabel:

Tabelul 1.7.21

Productivitatea muncitorilor la cele 5 tipuri de mașini
(buc. pe schimb)

Mașini \ Muncitori	1	2	3	4	5
A	38	45	23	21	13
B	41	50	37	16	33
C	43	38	14	12	13
D	32	19	23	25	24
E	15	34	18	20	16

Problema constă în a repartiza pe cei 5 muncitori la cele 5 mașini, în așa fel încît productivitatea secției să fie maximă.

În problema de alegere, numărul liniilor este egal cu numărul coloanelor, iar în soluția ei fiecare linie și fiecare coloană nu conțin decît o singură căsuță ocupată. Rezultă că fiecare soluție va conține numai 5 căsuțe ocupate, în loc de $5+5-1=9$ căsuțe ocupate; deci de la început se știe că soluția problemei este degenerată, și din această cauză este bine ca pentru rezolvarea ei să se aplice metoda diferențelor comparate.

Conform regulilor enunțate la tratarea acestei metode, vom repartiza în primul pas pe toți cei 5 muncitori la mașinile unde ei au cea mai mare productivitate și vom obține astfel repartiția inițială arătată în tabelul 1.7.22.

Se observă că, în această soluție inițială, mașina B este supraîncărcată, mașinile A și E sînt subîncărcate, iar mașinile C și D sînt exact încărcate. Este necesar deci ca 2 dintre cei 3 muncitori repartizați în soluția inițială la mașina B (muncitorii 2, 3 sau 5) să fie trecuți de la această mașină la mașinile neocupate încă (A și E).

Pentru a determina trecerea care duce la diminuarea cea mai mică a productivității pe secție, vom întocmi tabelul diferențelor (1.7.23).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.22

Mașini \ Muncitori	1	2	3	4	5	Muncitori repartizați	Supraîncărcarea (+) sau subîncărcarea (−) mașinilor
A	38	45	23	21	13	0	—1
B	41	1 | 50	1 | 37	16	1 | 33	3	+2
C	1 | 43	38	14	12	13	1	0
D	32	19	23	1 | 25	24	1	0
E	15	34	18	20	16	0	—1
Total muncitori	1	1	1	1	1	5	0

Tabelul 1.7.23

Scăderea productivității muncii în cazul trecerii muncitorilor 2,3 și 5 de la mașina supraîncărcată B la mașinile libere A și E

Mașini \ Muncitori	2	3	5
A	— 5	—14	—20
E	—16	—19	—17

Se vede că pierderea cea mai mică în ce privește productivitatea muncii pe secție (—5) are loc în cazul trecerii muncitorului 2 de la mașina B la mașina A. Înainte de a opera această trecere trebuie însă să ne asigurăm dacă prin trecerea muncitorilor 2, 3 sau 5 de la mașina B la mașinile exact încărcate C și D și a muncitorului 1 sau 4 de la mașinile C sau D la mașinile libere A și E nu se realizează cumva o reducere mai mică a productivității.

În cazul trecerii unuia dintre cei 3 muncitori (2, 3 sau 5) de la mașina B la mașina C și al trecerii muncitorului 1 de la această mașină fie direct la mașinile libere A și E, fie la mașina exact încărcată D și, în această ultimă ipoteză, a trans-

Scanned with OKEN Scanner

ferării muncitorului 4 la mașinile libere, vom avea următoarele reduceri ale productivității muncii pe secție:

Tabelul 1.7.24

Reducerea productivității muncii în cazul transferării unor muncitori de la mașina B la mașinile A și E prin intermediul transferării muncitorilor la și de la mașinile exact încărcate

		Muncitori		
		2	3	5
1	Prin trecerea muncitorilor de la mașina B la mașina C	—12	—23	—20
	Prin trecerea muncitorului 1 de la mașina C la mașina A	—5	—5	—5
	Reducerea totală . . .	—17	—28	—25
2	Prin trecerea muncitorilor de la mașina B la mașina C	—12	—23	—20
	Prin trecerea muncitorului 1 de la mașina C la mașina E	—28	—28	—28
	Reducerea totală . . .	—40	—51	—48
3	Prin trecerea muncitorilor de la mașina B la mașina C	—12	—23	—20
	Prin trecerea muncitorului 1 de la mașina C la mașina D	—11	—11	—11
	Prin trecerea muncitorului 4 de la mașina D la mașina A	—4	—4	—4
	Reducerea totală . . .	—27	—38	—35
4	Prin trecerea muncitorilor de la mașina B la mașina C	—12	—23	—20
	Prin trecerea muncitorului 1 de la mașina C la mașina D	—11	—11	—11
	Prin trecerea muncitorului 4 de la mașina D la mașina E	—5	—5	—5
	Reducerea totală . . .	—28	—39	—36

În cazul trecerii unuia dintre cei 3 muncitori de la mașina B la mașina D și al transferării muncitorului 4 de la această mașină la mașinile libere A și E fie direct, fie prin intermediul mașinii C (în care caz muncitorul 1 trebuie să fie mutat la una dintre mașinile libere), reducerile productivității muncii pe secție sînt:

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.25

		Muncitori		
		2	3	5
1	Prin trecerea muncitorilor de la maşina B la maşina D	—31	—14	—9
	Prin trecerea muncitorului 4 de la maşina D la maşina A	—4	—4	—4
	Reducerea totală . .	—35	—18	—13
2	Prin trecerea muncitorilor de la maşina B la maşina D	—31	—14	—9
	Prin trecerea muncitorului 4 de la maşina D la maşina E	—5	—5	—5
	Reducerea totală . .	—36	—19	—14
3	Prin trecerea muncitorilor de la maşina B la maşina D	—31	—14	—9
	Prin trecerea muncitorului 4 de la maşina D la maşina C	—13	—13	—13
	Total	—44	—27	—22

Ultimele reduceri fiind mai mari decît cele obţinute prin trecerea directă a muncitorilor de la maşina B la maşina C (—12, —23, —20), nu este necesar să mai continuăm calculul.

Din tabelele 1.7.23 — 1.7.25 rezultă că scăderea cea mai mică a productivităţii muncii are loc în cazul trecerii directe a muncitorului 2 de la maşina B la maşina A (—5). Vom opera deci această trecere, obţinînd tabelul 1.7.26.

În urma transferării efectuate, maşina B a rămas supraîncărcată, iar maşina E subîncărcată. Vom examina deci în continuare consecinţele trecerii unuia dintre cei 2 muncitori (3 şi 5) de la maşina B la maşina liberă E fie direct, fie prin transferarea unui muncitor de la maşina B la una dintre maşinile exact încărcate (A, C şi D) şi a muncitorului repartizat la aceste maşini la maşina liberă E.

Din tabelul 1.7.23 se vede că reducerea cea mai mică a productivităţii pe secţie (—17) are loc în cazul trecerii muncitorului 5 de la maşina B la maşina E. Din tabelul 1.7.25 se observă însă că, în cazul trecerii muncitorului 5 de la maşina B la maşina D şi al transferării muncitorului 4 de la aceasta la maşina E, reducerea productivităţii muncii pe secţie este mai mică (—14). Din acest tabel, precum şi din tabelul 1.7.24,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.26

Mașini \ Muncitori	1	2	3	4	5	Muncitori repartizați	Supraîncărcarea (+) subîncărcarea (−) a mașinilor
A	38	1 | 45	23	21	13	1	0
B	41	50	1 | 37	16	1 | 33	2	+1
C	1 | 43	38	14	12	13	1	0
D	32	19	23	1 | 25	24	1	0
E	15	34	18	20	16	0	−1
Total muncitori	1	1	1	1	1	5	0

se vede că orice altă combinație de transferări duce la o pierdere mai mare a productivității muncii.

Înainte de a opera această transferare trebuie însă să ne asigurăm dacă prin trecerea unuia dintre cei doi muncitori de la mașina B la mașina A, devenită exact încărcată, și prin transferarea muncitorului 2 de la această mașină la mașina E (direct sau prin intermediul mașinilor C și D) nu se realizează o pierdere mai mică. În acest scop vom întocmi tabelul 1.7.27.

Ultimele totaluri (−38, −44) prezentînd pierderi mai mari decît cele obținute prin trecerea directă a muncitorilor de la mașina B la mașina D (−14, −9), vom renunța la continuarea calculului, care ar duce la pierderi de productivitate a muncii pe secție mai mari decît cele obținute în tabelul 1.7.25.

Prin trecerea muncitorilor de la mașina B la mașina A și prin transferarea muncitorilor de la această mașină la mașina liberă E neobținînd o reducere mai mică decît −14, ne vom opri la această reducere, care se realizează, după cum s-a arătat, prin trecerea muncitorului 5 de la mașina B la mașina D și a muncitorului 4 de la mașina D la mașina E. Prin această transferare se obține tabelul 1.7.28.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.7.27

		Muncitori	
		3	5
1	Prin trecerea de la maşina B la maşina A .	—14	—20
	Prin trecerea muncitorului 2 de la maşina A la maşina E	—11	—11
	Reducerea totală	—25	—31
2	Prin trecerea de la maşina B la maşina A .	—14	—20
	Prin trecerea muncitorului 2 de la maşina A la maşina C	—7	—7
	Prin trecerea muncitorului 1 de la maşina C la maşina E	—28	—28
	Reducerea totală	—49	—55
3	Prin trecerea de la maşina B la maşina A .	—14	—20
	Prin trecerea muncitorului 2 de la maşina A la maşina D	—24	—24
	Total	—38	—44

Tabelul 1.7.28

Muncitori / Maşini	1	2	3	4	5	Muncitori repartizaţi	Supraîncărcarea sau subîncărcarea maşinilor
A	38	1 | 45	23	21	13	1	0
B	41	50	1 | 37	16	33	1	0
C	1 | 43	38	14	12	13	1	0
D	32	19	23	25	1 | 24	1	0
E	15	34	18	1 | 20	16	1	0
Total muncitori	1	1	1	1	1	5	0

Scanned with OKEN Scanner

Acest ultim tabel, în care la fiecare mașină este repartizat cîte un muncitor, constituie soluția optimă a problemei.

Conform soluției optime,

muncitorul 1 este repartizat la mașina C;
„ 2 „ „ „ „ A;
„ 3 „ „ „ „ B;
„ 4 „ „ „ „ E;
„ 5 „ „ „ „ D.

Productivitatea muncii în această soluție este:

$43 + 45 + 37 + 20 + 24 = 169$ de bucăți pe schimb.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a

În prima parte a lucrării au fost tratate unele metode şi procedee generale de soluţionare a problemei de transport. În partea a doua vom trata unele chestiuni speciale, cum sînt, de pildă, problema parametrică de transport; problema de transport pentru produse interschimbabile; problema de transport cu capacităţi limitate; problema de transport cu centre intermediare, problema generală a programării liniare şi, în sfîrşit, un capitol în care sînt cuprinse unele aplicaţii practice ale problemei de transport.

Capitolul I

PROBLEMA PARAMETRICĂ DE TRANSPORT[1]

După cum se ştie, planurile de transport se întocmesc periodic (decadal, lunar, trimestrial etc.). De la o perioadă la alta, majoritatea expeditorilor şi a destinatarilor rămîn aceiaşi, modificîndu-se doar cantităţile disponibile în centrele de expediţie şi cantităţile necesare în centrele de destinaţie. Uneori însă se modifică chiar structura expeditorilor şi a beneficiarilor. În aceste situaţii, problema care se pune este de a se arăta cum se determină o soluţie optimă pentru o perioadă următoare, cînd se cunoaşte soluţia optimă a perioadei anterioare, fără să se mai reia calculele de la început.

Se disting trei cazuri:

a) în perioada următoare, centrele de expediţie şi de destinaţie rămîn aceleaşi ca în perioada de bază, modificîndu-se doar cantităţile disponibile în centrele de expediţie şi cantităţile necesare centrelor de destinaţie;

[1] Această problemă a fost soluţionată şi fundamentată teoretic de către un colectiv condus de Acad. Gr. C. Moisil.

b) în perioada următoare, în afară de faptul că se modifică cantităţile necesare şi disponibile, se schimbă şi structura fie a beneficiarilor, fie a expeditorilor (apar o serie de beneficiari sau expeditori noi, dispar o parte dintre cei vechi);

c) în perioada următoare se schimbă, pe lîngă cantităţile necesare şi disponibile, atît structura beneficiarilor, cît şi a expeditorilor.

§ 1. Cazul cînd structura expeditorilor şi a beneficiarilor rămîne neschimbată

Să presupunem că se cunoaşte o soluţie optimă a problemei pentru o perioadă precedentă şi că trebuie să determinăm o soluţie optimă pentru o problemă de transport în care furnizorii şi beneficiarii rămîn aceiaşi, modificîndu-se numai cantităţile disponibile şi cantităţile necesare.

În această situaţie problema se soluţionează în două etape:

În prima etapă se alege o soluţie iniţială care să folosească toate rutele utilizate în planul optim al perioadei precedente. Întrucît disponibilul şi necesarul centrelor de expediţie şi destinaţie s-au modificat, folosirea tuturor rutelor din planul optim vechi nu va fi, în general, posibilă decît dacă în unele căsuţe vom plasa şi numere negative.

Dacă în soluţia iniţială, determinată pentru noua perioadă, nu apar valori negative, soluţia obţinută este cea optimă. Justificarea acestei afirmaţii este imediată dacă ţinem seama că în găsirea soluţiei optime se utilizează aceleaşi rute ca şi în cazul soluţiei optime din perioada precedentă.

Dacă în soluţia iniţială apar şi valori negative, rezultă că soluţia nu este admisibilă, întrucît nu sînt satisfăcute condiţiile din modelul matematic referitoare la nenegativitatea valorilor x_{ij}. În această situaţie se trece la etapa a II-a, în care se urmăreşte să dispară toate cantităţile x_{ij} negative. În acest scop, pentru fiecare căsuţă în care apare un x_{ij} negativ se vor construi toate ciclurile în care căsuţa respectivă este într-un colţ impar. Dintre toate aceste cicluri se alege acela care corespunde celei mai mici diferenţe $(c_{ij} - U_i - V_j)$ *. Cantităţile din căsuţele ciclului determinat se vor modifica cu cea mai mare valoare absolută a x_{ij}-urilor negativi aparţinînd ciclului în poziţii impare. Dacă şi după aceasta soluţia continuă să conţină valori negative, procedeul se repetă pînă la eliminarea

* În lucrarea indicată în bibliografie [3] se dă o metodă de determinare directă a ciclului căutat.

Scanned with OKEN Scanner

acestora. În momentul cînd nu mai apare nici un x_{ij} negativ, soluția este admisibilă și de asemenea optimă.

Exemplu: să presupunem că avem de determinat un plan optim de transport al unui produs de la 4 centre de expediție la 5 centre de destinație. Cantitățile disponibile în centrele de expediție sînt: $a_1 = 65$; $a_2 = 80$; $a_3 = 55$; $a_4 = 20$; iar cantitățile necesare în centrele de destinație sînt $b_1 = 50$; $b_2 = 40$; $b_3 = 35$; $b_4 = 35$; $b_5 = 40$.

Distanțele dintre centrele de expediție și cele de destinație, precum și celelalte date ale problemei, sînt trecute în tabelul următor:

Tabelul 2.1.01

E \ D	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	20	65	50	25	60	65
2	30	45	55	20	45	80
3	45	35	70	31	50	55
4	25	60	110	45	25	20
Cantitatea necesară	50	40	35	35	60	220

Rezolvînd problema cu ajutorul uneia dintre metodele cunoscute, obținem următoarea soluție optimă:

Tabelul 2.1.02

	1	2	3	4	5	
1	50		15			65
2			20	35	25	80
3		40			15	55
4					20	20
	50	40	35	35	60	

Valorile U_i, V_j corespunzătoare acestei soluții, precum și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, sînt următoarele:

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1.03

v_i \ v_j	25	30	55	20	45
—5	0	40	0	10	20
0	5	15	0	0	0
5	15	0	10	6	0
—20	20	50	75	45	0

Să presupunem că într-o perioadă următoare, expeditorii și destinatarii rămîn aceiași, cantitățile disponibile în centrele de expediție sînt: $a_1 = 50$; $a_2 = 75$; $a_3 = 70$; $a_4 = 40$, și cantitățile necesare în centrele de destinație sînt: $b_1 = 60$; $b_2 = 50$; $b_3 = 50$; $b_4 = 40$; $b_5 = 35$.

Ecuațiile modelului matematic în această situație sînt:

$$(2.1.01)\quad \begin{cases} (1)\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 50 \\ (2)\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 75 \\ (3)\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 70 \\ (4)\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 40 \\ (5)\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 60 \\ (6)\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 50 \\ (7)\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50 \\ (8)\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 40 \\ (9)\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 35 \end{cases}$$

Pentru a nu lua de la început calculul necesar obținerii unei soluții optime, în noua situație vom determina o soluție inițială, utilizînd toate rutele din planul optim dat de tabelul 2.1.02. Urmează deci că, în soluția inițială, numai valorile x_{11}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{32}, x_{35} și x_{45} trebuie să fie diferite de zero (vezi tabelul 2.1.02), restul valorilor x_{ij} trebuind să fie nule.

Scanned with OKEN Scanner

Din modelul matematic scris mai sus, vom reține numai valorile x_{ij} enumerate, restul considerîndu-le egale cu zero:

$$(2.1.01')\quad \begin{cases} (1)\ x_{11} + x_{13} = 50 \\ (2)\ x_{23} + x_{24} + x_{25} = 75 \\ (3)\ x_{32} + x_{35} = 70 \\ (4)\ x_{45} = 40 \\ (5)\ x_{11} = 60 \\ (6)\ x_{32} = 50 \\ (7)\ x_{13} + x_{23} = 50 \\ (8)\ x_{24} = 40 \\ (9)\ x_{25} + x_{35} + x_{45} = 35 \end{cases}$$

Avem următoarele valori direct determinate:

$$x_{11} = 60,\quad x_{32} = 50,\quad x_{24} = 40,\quad x_{45} = 40;$$

din ecuația (1): $x_{13} = 50 - x_{11} = 50 - 60 = -10$;

din ecuația (7): $x_{23} = 50 - x_{13} = 50 - (-10) = 60$;

din ecuația (2): $x_{25} = 75 - (x_{23} + x_{24}) = 75 - 60 - 40 = -25$;

din ultima ecuație: $x_{35} = 35 - (x_{25} + x_{45}) = 35 - (-25 + 40) = 20$.

Deci soluția inițială este următoarea:

Tabelul 2.1.04

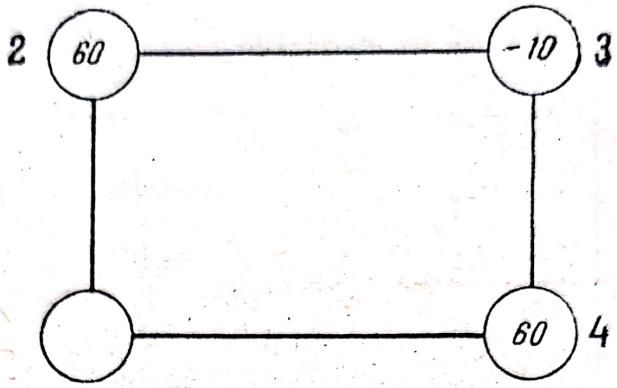
	1	2	3	4	5	
1	60		−10			50
2			60	40	−25	75
3		50			20	70
4					40	40
	60	50	50	40	35	

Întrucît apar valori negative ($x_{13} = -10$ și $x_{25} = -25$), acest tabel nu conține soluția admisibilă. În vederea eliminării valorilor negative vom forma, pentru fiecare căsuță cu valori

Scanned with OKEN Scanner

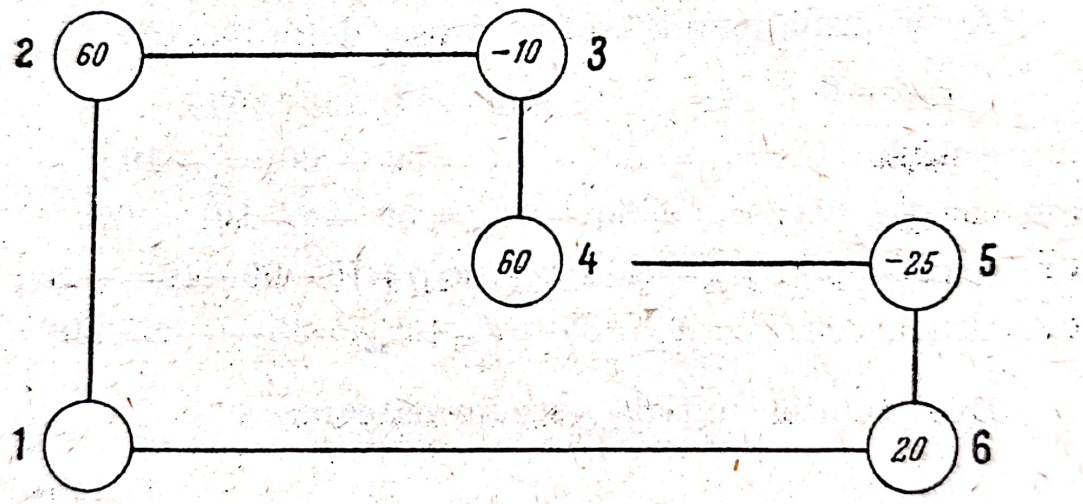
negative, toate ciclurile în care aceste căsuțe să fie situate în colțuri impare.

Astfel:



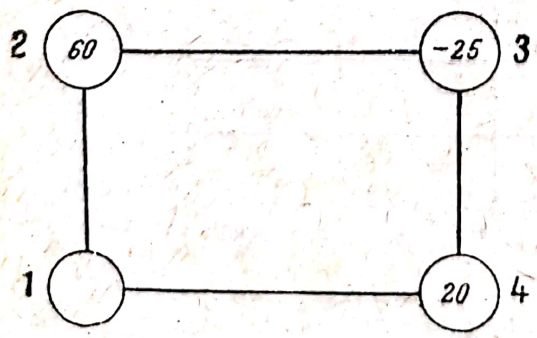
Ciclul 1

(corespunzător căsuței 2,1)



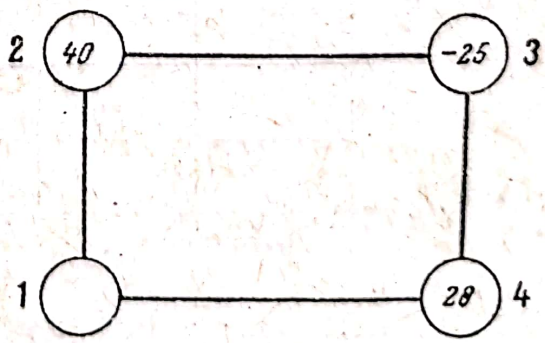
Ciclul 2

(corespunzător căsuței 3,1)



Ciclul 3

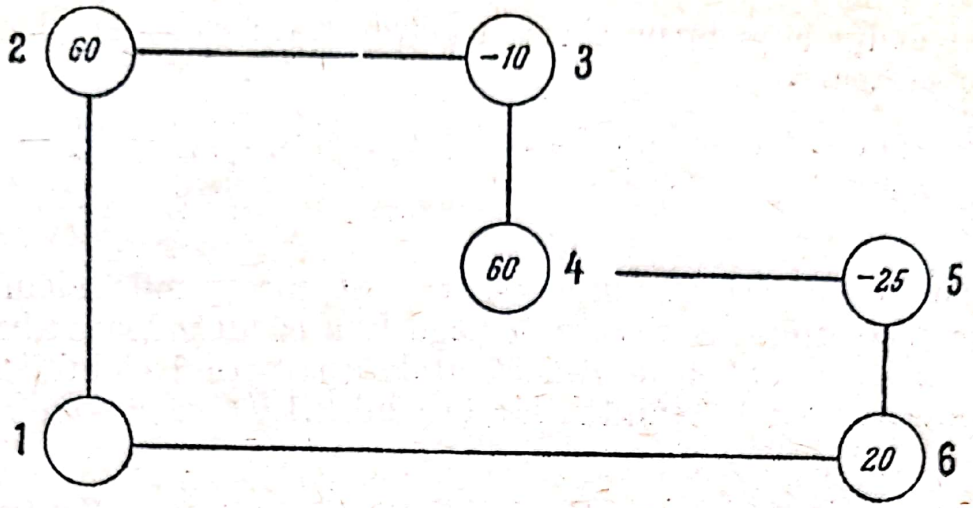
(corespunzător căsuței 3,3)



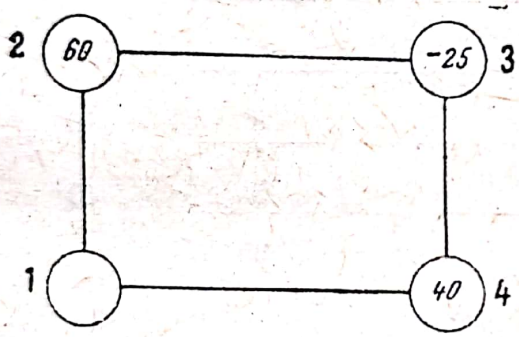
Ciclul 4

(corespunzător căsuței 3,4)

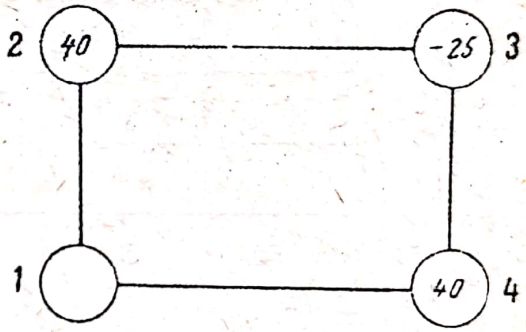
Scanned with OKEN Scanner



Ciclul 5
(corespunzător căsuței 4,1)



Ciclul 6
(corespunzător căsuței 4,3)



Ciclul 7
(corespunzător căsuței 4,4)

După cum am mai spus, dintre acestea trebuie să alegem ciclul care corespunde celei mai mici diferențe $c_{ij} - U_i - V_j$. Diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ corespunzătoare sînt (vezi tabelul 2.1.03):

pentru ciclul 1 (corespunzător căsuței 2,1): $c_{21} - U_2 - V_1 = 5$;
pentru ciclul 2 (corespunzător căsuței 3,1): $c_{31} - U_3 - V_1 = 15$;
pentru ciclul 3 (corespunzător căsuței 3,3): $c_{33} - U_3 - V_3 = 10$;
pentru ciclul 4 (corespunzător căsuței 3,4): $c_{34} - U_3 - V_4 = 6$;
pentru ciclul 5 (corespunzător căsuței 4,1): $c_{41} - U_4 - V_1 = 20$;

Scanned with OKEN Scanner

pentru ciclul 6 (corespunzător căsuței 4,3): $c_{43} - U_4 - V_3 = 75$;

pentru ciclul 7 (corespunzător căsuței 4,4): $c_{44} - U_4 - V_4 = 45$.

Diferența cea mai mică este 5 și corespunde ciclului 1. În acest ciclu există un număr negativ a cărui valoare absolută este 10. Deci cantitățile din căsuțele aparținînd ciclului 1 vor fi modificate cu 10 unități, iar tabelul 2.1.04 va deveni:

Tabelul 2.1.05

	1	2	3	4	5	
1	50					50
2	10		50	40	—25	75
3		50			20	70
4					40	40
	60	50	50	40	35	

Valorile U_i, V_j, precum și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ corespunzătoare, sînt:

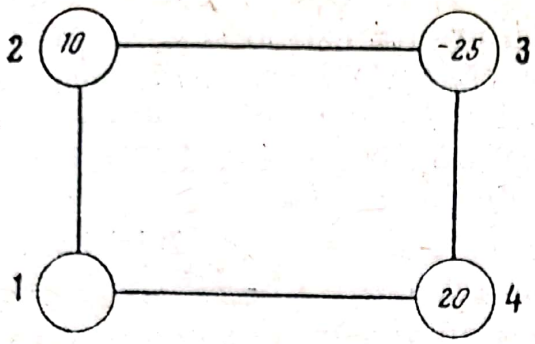
Tabelul 2.1.06

U_i \ V_j	30	30	55	20	45
—10	0	45	5	15	25
0	0	15	0	0	0
5	10	0	10	6	0
—20	15	50	75	45	0

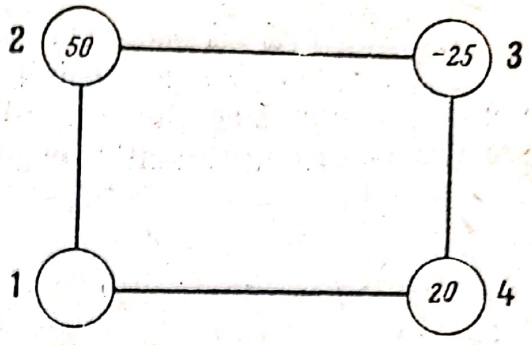
Se observă că nici aceasta nu-i soluția optimă.

Soluția din tabelul 2.1.05 conține valoarea negativă —25, iar ciclurile care conțin această valoare în poziții impare sînt:

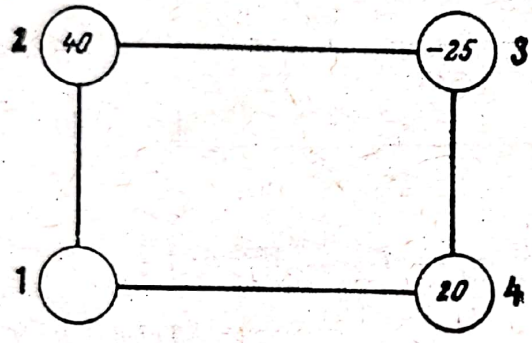
Scanned with OKEN Scanner



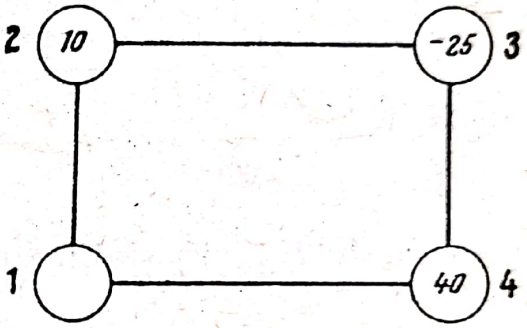
Ciclul 1
(corespunzător căsuței 3,1)



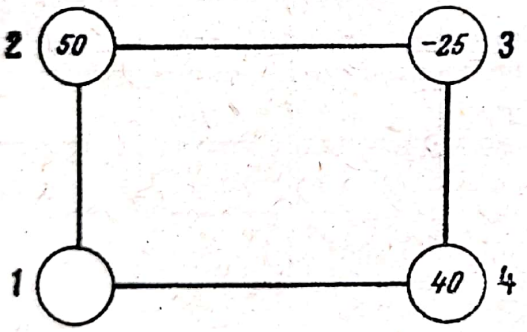
Ciclul 2
(corespunzător căsuței 3,3)



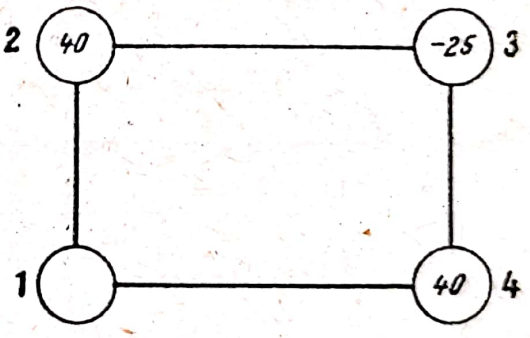
Ciclul 3
(corespunzător căsuței 3,4)



Ciclul 4
(corespunzător căsuței 4,1)



Ciclul 5
(corespunzător căsuței 4,3)



Ciclul 6
(corespunzător căsuței 4,4)

Diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ corespunzătoare sînt (vezi tabelul 2.1.06):

pentru ciclul 1 : $c_{31} - U_3 - V_1 = 10$;
" " 2 : $c_{33} - U_3 - V_3 = 10$;
" " 3 : $c_{34} - U_3 - V_4 = 6$;
" " 4 : $c_{41} - U_4 - V_1 = 15$;
" " 5 : $c_{43} - U_4 - V_3 = 75$;
" " 6 : $c_{44} - U_4 - V_4 = 45$.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că cea mai mică diferență este 6 și corespunde ciclului 3; deci la cantitățile din căsuțele impare ale acestui ciclu se vor adăuga 25 de unități, iar din cantitățile din colțurile pare ale ciclului se vor scădea 25 de unități. Făcînd calculele, soluția din tabelul 2.1.05 devine:

Tabelul 2.1.07

	1	2	3	4	5	
1	50					50
2	10		50	15		75
3		50		25	—5	70
4					40	40
	60	50	50	40	35	

Valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ sînt:

Tabelul 2.1.08

U_i \ V_j	30	24	55	20	39
—10	0	51	5	15	31
0	0	21	0	0	6
11	4	0	4	0	0
—14	9	50	69	39	0

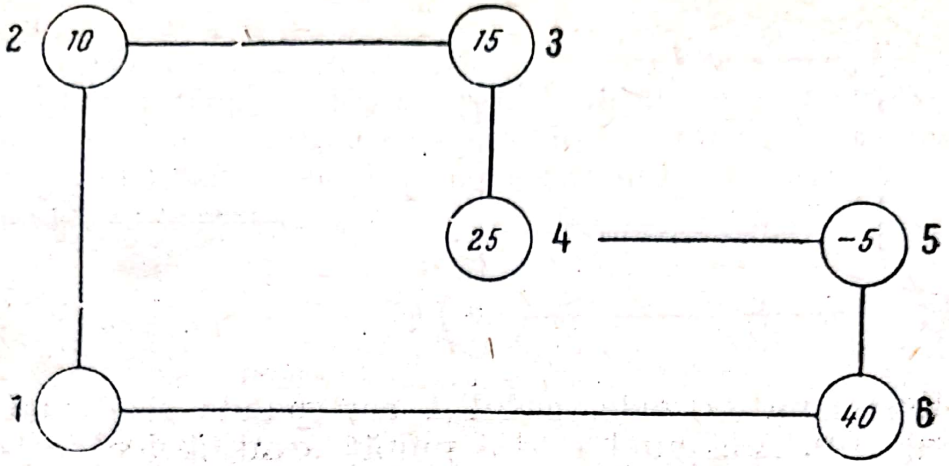
După cum rezultă din acest tabel, soluția dată de tabelul 2.1.07 este optimă, dar întrucît conține valoarea —5 în căsuța (3,5), nu este și o soluție admisibilă.

Ciclurile care conțin căsuța (3,5) într-un colț impar sînt arătate la pag. 159—160.

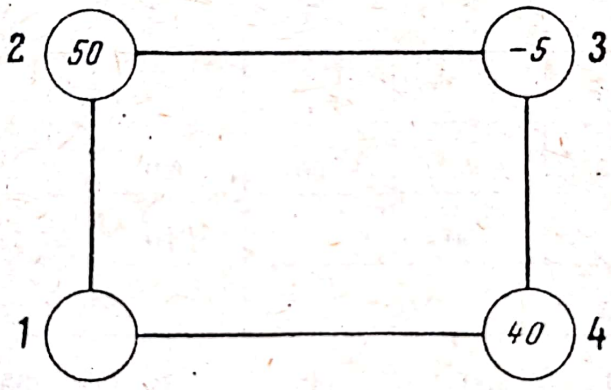
Din tabelul 2.1.08 avem următoarele diferențe:

pentru ciclul 1: $c_{41} - U_4 - V_1 = 9$;
„ „ 2: $c_{42} - U_4 - V_2 = 50$;
„ „ 3: $c_{43} - U_4 - V_3 = 69$;
„ „ 4: $c_{44} - U_4 - V_4 = 39$.

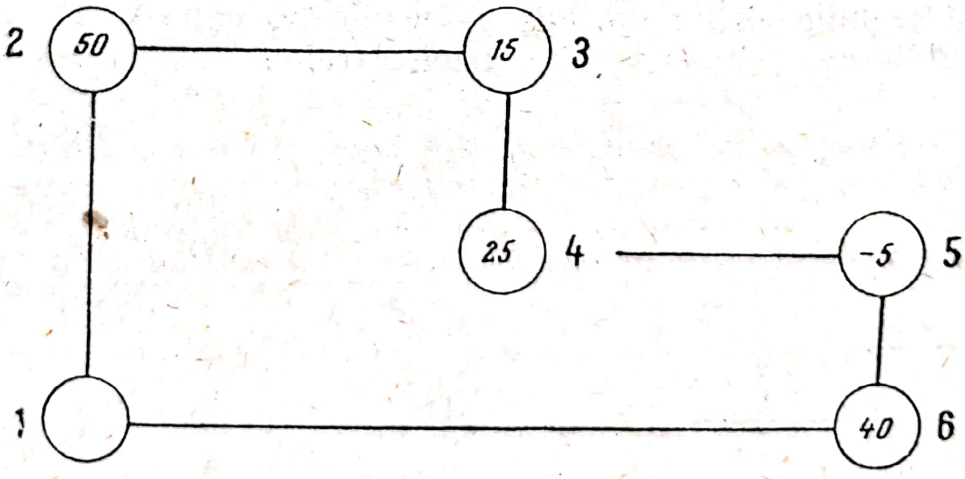
Scanned with OKEN Scanner



Ciclul 1
(corespunzător căsuței 4,1)

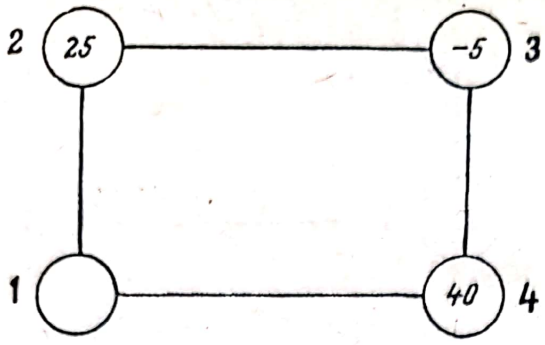


Ciclul 2
(corespunzător căsuței 4,2)



Ciclul 3
(corespunzător căsuței 4,3)

Scanned with OKEN Scanner



Ciclul 4
(corespunzător căsuței 4,4)

După cum se vede, ciclul 1 corespunde celei mai mici diferențe (9). Adăugînd cîte 5 unități cantităților din colțurile impare și scăzînd cîte 5 unități din colțurile pare, obținem soluția :

Tabelul 2.1.09

	1	2	3	4	5	
1	50					50
2	5		50	20		75
3		50		20		70
4	5				35	40
	60	50	50	40	35	

Se vede că în această situație nici un x_{ij} nu este negativ, deci avem o soluție admisibilă. Conform procedeului urmat, soluția trebuie să fie optimă. Într-adevăr, valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ sînt următoarele :

Tabelul 2.1.10

U_i \ V_j	30	24	55	20	30
—10	0	51	5	15	40
0	0	21	0	0	15
11	4	0	4	0	9
—5	0	41	60	30	0

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că, întrucît nici una dintre diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ nu este negativă, soluția dată în tabelul 2.1.09 este optimă.

Procedeul de mai sus, aplicat în cazul unor probleme de dimensiuni mari, poate conduce la o reducere substanțială a volumului calculelor.

§ 2. Cazul cînd se modifică fie structura expeditorilor, fie structura beneficiarilor

În problemele practice, după cum am mai arătat, se întîlnesc adesea cazuri în care de la o perioadă la alta, pe lîngă faptul că se modifică cantitățile disponibile, respectiv cele necesare, apar și o serie de beneficiari noi, iar o parte din vechii beneficiari nu mai solicită, nici o cantitate, în noua perioadă,

De exemplu, să presupunem că într-o anumită perioadă avem de întocmit un plan pentru desfacerea unui anumit produs de la 4 centre de expediție la 5 centre de destinație. Datele problemei sînt :

Tabelul 2.1.11

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	30	35	64	63	53	25
2	80	65	29	29	59	35
3	70	40	35	80	64	35
4	50	38	84	60	38	55
Cantitatea necesară	30	45	20	30	25	150

Soluția optimă a problemei este dată în tabelul 2.1.12.

Valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ corespunzătoare sînt prezentate în tabelul 2.1.13.

Să presupunem că în perioada următoare beneficiarul 5 nu mai solicită nici o cantitate, beneficiarii 1, 2, 3, 4 solicitînd respectiv 20, 50, 40 și 60 de unități. În plus apar doi beneficiari noi, care solicită 15 și, respectiv, 25 unități. Cantitățile disponibile la cei patru expeditori sînt, respectiv, 30, 45, 50 și 85 de unități.

Datele problemei în noua situație sînt prezentate în tabelul 2.1.14.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1.12

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	Canttatea disponibilă
1	25					25
2			5	30		35
3		20	15			35
4	5	25			25	55
Cantitatea necesară	30	45	20	30	25	150

Tabelul 2.1.13

U_i / V_j	50	38	33	33	38
—20	0	17	51	50	35
—4	34	31	0	0	25
2	18	0	0	45	24
0	0	0	51	27	0

Tabelul 2.1.14

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	6	Cantitatea disponibilă
1	30	35	64	63	39	25	30
2	80	65	29	29	64	20	45
3	70	40	35	80	83	40	50
4	50	38	84	60	64	30	85
Cantitatea necesară	20	50	40	60	15	25	210

Scanned with OKEN Scanner

În coloanele 5 și 6 sînt date distanțele de la fiecare expeditor la cei doi beneficiari noi.

Întrucît în noua perioadă toți expeditorii și 4 beneficiari au rămas aceeași, soluția optimă a problemei, ale cărei date sînt expuse în tabelul 2.1.14, va fi determinată pornindu-se de la soluția optimă obținută în tabelul 2.1.12. Astfel se va determina mai întîi o soluție inițială, pentru care se va proceda după cum urmează:

— beneficiarii care au existat și în perioada precedentă vor fi aprovizionați de aceiași expeditori (tabelul 2.1.12);

— pentru noii beneficiari se vor calcula diferențele dintre distanța la fiecare expeditor și valoarea U_i corespunzătoare, calculat pentru soluția optimă precedentă (tabelul 2.1.13). Dintre diferențele calculate se va alege cea mai mică, urmînd ca beneficiarul să fie aprovizionat cu întreaga cantitate de la expeditorul pentru care se realizează diferența minimă.

În cazul cînd pentru necunoscutele x_{ij} soluția inițială nu conține valori negative, ea este admisibilă și optimă. Această afirmație este justificată dacă ținem seama că pentru vechii beneficiari se folosesc rutele din planul optim de transport precedent, iar pentru noii beneficiari rutele ce se aleg în soluția inițială sînt determinate după cum am arătat. Deci, dacă vom lua valorile U_i, V_j, corespunzătoare beneficiarilor vechi, egale cu cele determinate pentru soluția optimă precedentă, iar dacă pentru beneficiarii noi vom lua V_j egal cu minimul dintre diferențele $c_{ij} - U_i$, diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ vor fi nule pentru căsuțele ocupate și nenegative pentru celelalte căsuțe.

În cazul nostru avem (vezi tabelul 2.1.13): $U_1 = -20$, $U_2 = -4$, $U_3 = 2$, $U_4 = 0$.

Pentru beneficiarul 5, diferențele $c_{i5} - U_i$ sînt:

$$c_{15} - U_1 = 39 - (-20) = 59;$$

$$c_{25} - U_2 = 64 - (-4) = 68;$$

$$c_{35} - U_3 = 83 - 2 = 81;$$

$$c_{45} - U_4 = 64 - 0 = 64.$$

Diferența cea mai mică fiind $c_{15} - U_1 = 59$, rezultă că beneficiarul 5 va primi întreaga cantitatea necesară de la expeditorul 1.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru beneficiarul 6, diferențele $c_{i6} - U_i$ sînt :

$$c_{16} - U_1 = 25 - (-20) = 45;$$
$$c_{26} - U_2 = 20 - (-4) = 24;$$
$$c_{36} - U_3 = 40 - 2 = 38;$$
$$c_{46} - U_4 = 30 - 0 = 30.$$

Diferența cea mai mică fiind $c_{26} - U_2 = 24$, urmează ca beneficiarul 6 să fie aprovizionat de expeditorul 2.

Pentru determinarea necunoscutelor x_{ij} vom ține seama că în soluția inițială valori nenule vor primi numai necunoscutele x_{11}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{26}, x_{32}, x_{33}, x_{41} și x_{42}.

În ecuațiile modelului matematic, făcînd toate celelalte necunoscute egale cu zero, obținem :

$$(2.1.02)\quad \begin{cases} (1)\ x_{11} + x_{15} = 30 \\ (2)\ x_{23} + x_{24} + x_{26} = 45 \\ (3)\ x_{32} + x_{33} = 50 \\ (4)\ x_{41} + x_{42} = 85 \\ (5)\ x_{11} + x_{41} = 20 \\ (6)\ x_{32} + x_{42} = 50 \\ (7)\ x_{23} + x_{33} = 40 \\ (8)\ x_{24} = 60 \\ (9)\ x_{15} = 15 \\ (10)\ x_{26} = 25 \end{cases}$$

Din ultimele trei ecuații avem : $x_{24} = 60$, $x_{15} = 15$, $x_{26} = 25$; din ecuația (1) rezultă $x_{11} = 15$; din ecuația (2) $x_{23} = -40$; din ecuația (5) $x_{41} = 5$; din ecuația (4) $x_{42} = 80$; din ecuația (6) $x_{32} = -30$, iar din ecuația (7) $x_{33} = 80$.

Deci soluția inițială este următoarea :

Tabelul 2.1.15

	1	2	3	4	5	6	
1	15				15		30
2			—40	60		25	45
3		—30	80				50
4	5	80					85
	20	50	40	60	15	25	

Scanned with OKEN Scanner

Valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ corespunzătoare acestei soluții sînt:

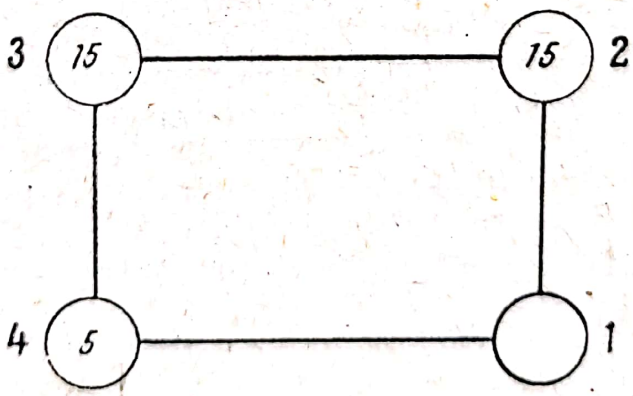
Tabelul 2.1.16

U_i \ V_j	50	38	33	33	59	24
—20	0	17	51	50	0	21
—4	34	31	0	0	9	0
2	18	0	0	45	22	14
0	0	0	51	27	5	6

După cum se vede, nici una dintre diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ nu este negativă, deci soluția inițială dată de tabelul 2.1.15 este optimă, dar nu este admisibilă, existînd două valori x_{ij} negative. Transformarea soluției optime neadmisibile într-o soluție optimă admisibilă se face la fel ca în paragraful precedent, formîndu-se toate ciclurile care conțin într-unul din colțurile impare căsuțe cu valori negative și dintre acestea se alege ciclul căruia îi corespunde cea mai mică diferență $c_{ij} - U_i - V_j$.

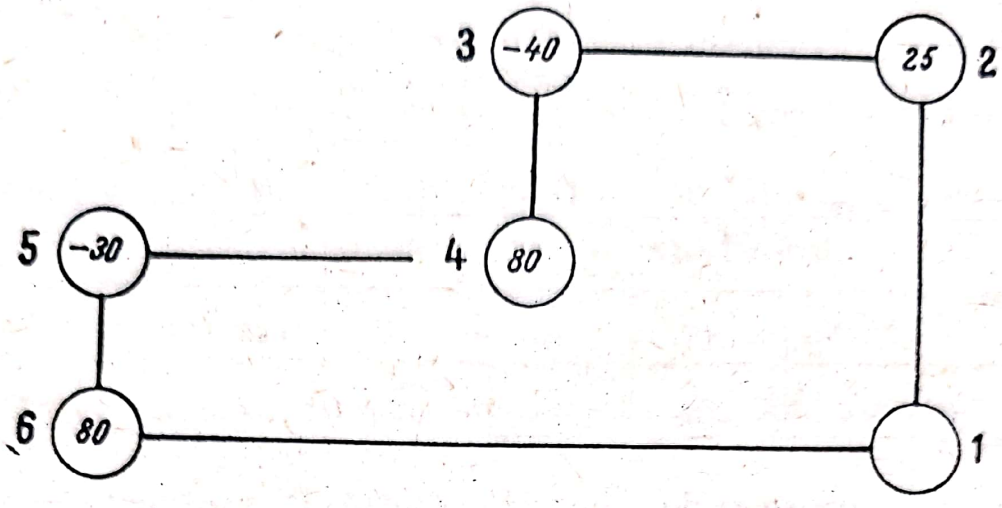
Pentru rezolvarea unor probleme de dimensiuni mai mari, volumul calculelor se poate micșora dacă se procedează invers, și anume luînd în ordine crescîndă diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ și verificînd dacă în ciclul corespunzător există într unul din colțurile impare o căsuță ce conține cantități negative.

În tabelul 2.1.16, diferența pozitivă cea mai mică este 5. Ciclul corespunzător este:



și nu conține căsuțe cu cantități negative.

Următoarea diferență este 6 cu ciclul :



Acest ciclu, conținînd cantități negative în colțurile impare, va fi reținut. Dacă nici în acest ciclu n-ar fi apărut căsuțe cu cantități negative în colțurile impare, am fi continuat formarea ciclurilor, luînd din tabelul 2.1.16 diferențele 9, 14, 17, 18 ș.a.m.d.

Întrucît în ciclul de mai sus apar două cantități negative, cantitățile din căsuțele aparținînd ciclului vor fi modificate cu cea mai mare valoare absolută dintre cele două valori negative. Deci cantitățile din căsuțele ciclului se modifică cu 40. Noua soluție va fi :

Tabelul 2.1.17

	1	2	3	4	5	6	
1	15				15		30
2				60		—15	45
3		10	40				50
4	5	40				40	85
	20	50	40	60	15	25	

Procedînd astfel, după un număr de iterații obținem următoarea soluție optimă și admisibilă :

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1.18

	2	3	4	5	6	
1	15					30
2				15		45
3			45			50
4	5	10	40			85
	40		15		25	
	20	50	40	60	15	25

★

Procedeul de determinare a soluției inițiale este același și în cazul cînd beneficiarii rămîn aceiași și se modifică numai expeditorii.

Vechii expeditori vor aproviziona aceiași beneficiari ca și în perioada precedentă, iar noii expeditori vor aproviziona pe beneficiarul pentru care se realizează cea mai mică diferență $c_{ij} - V_j$. Dacă soluția inițială conține valori negative, se va proceda în modul arătat mai înainte.

§ 3. Cazul cînd se modifică atît structura expeditorilor, cît și structura destinatarilor

La întocmirea planurilor de desfacere pentru produse industriale se modifică de la o perioadă la alta de cele mai multe ori numai beneficiarii. Sînt, totuși, probleme în care de la o perioadă la alta se schimbă și expeditorii. Astfel de probleme sînt, de pildă, cele de aprovizionare-desfacere cu produse agricole, problema repartizării vagoanelor goale ș.a.

În cele ce urmează vom arăta cum se obține o soluție optimă pentru o anumită perioadă în care intervin expeditori și beneficiari noi, plecîndu-se de la soluția optimă obținută pentru perioada precedentă. Soluția inițială va fi determinată astfel: pentru expeditorii și beneficiarii vechi se vor folosi aceleași rute ca în planul optim din perioada precedentă. Pentru expeditorii noi se vor calcula diferențele $c_{ij} - V_j$, din perioada precedentă. Dintre acestea se va alege cea mai mică diferență, urmînd ca expeditorul nou să aprovizioneze beneficiarul pentru care se realizează minimul diferențelor. De asemenea, corespunzător noilor expeditori, se va lua $U_i =$ mi-

Tabelul 2.1.18

	1	2	3	4	5	6	
1	15				15		30
2				45			45
3		10	40				50
4	5	40		15		25	85
	20	50	40	60	15	25	

*

Procedeul de determinare a soluției inițiale este același și în cazul cînd beneficiarii rămîn aceiași și se modifică numai expeditorii.

Vechii expeditori vor aproviziona aceiași beneficiari ca și în perioada precedentă, iar noii expeditori vor aproviziona pe beneficiarul pentru care se realizează cea mai mică diferență $c_{ij} - V_j$. Dacă soluția inițială conține valori negative, se va proceda în modul arătat mai înainte.

§ 3. Cazul cînd se modifică atît structura expeditorilor, cît și structura destinatarilor

La întocmirea planurilor de desfacere pentru produse industriale se modifică de la o perioadă la alta de cele mai multe ori numai beneficiarii. Sînt, totuși, probleme în care de la o perioadă la alta se schimbă și expeditorii. Astfel de probleme sînt, de pildă, cele de aprovizionare-desfacere cu produse agricole, problema repartizării vagoanelor goale ș.a.

În cele ce urmează vom arăta cum se obține o soluție optimă pentru o anumită perioadă în care intervin expeditori și beneficiari noi, plecîndu-se de la soluția optimă obținută pentru perioada precedentă. Soluția inițială va fi determinată astfel: pentru expeditorii și beneficiarii vechi se vor folosi aceleași rute ca în planul optim din perioada precedentă. Pentru expeditorii noi se vor calcula diferențele $c_{ij} - V_j$, V_j, fiind corespunzătoare vechilor beneficiari în soluția optimă din perioada precedentă. Dintre acestea se va alege cea mai mică diferență, urmînd ca expeditorul nou să aprovizioneze beneficiarul pentru care se realizează minimul diferențelor. De asemenea, corespunzător noilor expeditori, se va lua $U_i = \min$

Scanned with OKEN Scanner

$(c_{ij} - v_j)$, considerînd numai mărimile V_j corespunzătoare vechilor beneficiari. În ceea ce privește noii beneficiari vom considera diferențele $c_{ij} - U_i$, unde pentru vechii expeditori U_i sînt cele corespunzătoare soluției optime din perioada precedentă, iar pentru noii expeditori U_i sînt cele calculate ca mai sus. Expeditorul i pentru care se realizează minimul diferențelor $c_{ij} - U_i$ va aproviziona pe beneficiarul nou j.

Pentru exemplificare să presupunem că trebuie soluționată o problemă de desfacere de la 3 expeditori la 5 destinatari, datele problemei fiind următoarele :

Tabelul 2.1.19

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	25	60	34	26	42	20
2	35	45	16	28	37	30
3	40	28	18	40	51	50
Cantitatea necesară	10	15	24	30	21	100

Soluția optimă, valorile U_i, V_j și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$ sînt :

Tabelul 2.1.20

U_i \ V_j	39	28	18	40	49	
−14	0 (10)	46	30	0 (10)	7	20
−12	8	29	10	0 (9)	0 (21)	30
0	1	0 (15)	0 (24)	0 (11)	2	50
	10	15	24	30	21	

Să presupunem, de exemplu, că într-o perioadă următoare apare un expeditor în plus. În ceea ce privește beneficiarii, în noua perioadă beneficiarul 5 nu mai solicită nici o cantitate, dar apar în schimb doi beneficiari noi.

Scanned with OKEN Scanner

Datele problemei pentru noua perioadă sînt :

Tabelul 2.1.21

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	6	Cantitatea disponibilă
1	25	60	34	26	25	40	43
2	35	45	16	28	16	45	23
3	40	28	18	40	27	25	40
4	18	23	30	40	25	48	25
Cantitatea necesară	20	26	24	16	23	22	131

În linia 4 a tabelului de mai sus se dau distanțele de la expeditorul nou apărut la cei 6 beneficiari, iar în coloanele 5 și 6 se dau distanțele de la beneficiarii nou apăruți la expeditorii 1, 2, 3 și 4. Pentru determinarea soluției inițiale vom proceda deci după cum am arătat. În primul rînd, pentru expeditorul 4, nou apărut, vom calcula diferențele $c_{4j} - V_j$, unde V_j sînt cele din tabelul 2.1.20 (numai pentru primii 4 beneficiari). Adică :

$$c_{41} - V_1 = 18 - 39 = -21\,;\ c_{42} - V_2 = 23 - 28 = -5\,;$$
$$c_{43} - V_3 = 30 - 18 = 12\,;\ c_{44} - V_4 = 40 - 40 = 0.$$

Diferența cea mai mică este — 21 și corespunde beneficiarului 1. Urmează deci ca expeditorul 4 să aprovizioneze în soluția inițială beneficiarul 1. De asemenea, vom lua $U_4 = -21$.

Pentru beneficiarii 5 și 6 vom calcula diferențele $c_{ij} - U_i$, unde U_1, U_2 și U_3 sînt cele din tabelul 2.1.20, iar $U_4 = -21$.

Pentru beneficiarul 5 avem :

$$c_{15} - U_1 = 25 - (-14) = 39\,;\ c_{25} - U_2 = 16 - (-12) = 28\,;$$
$$c_{35} - U_3 = 27 - 0 = 27\,;\ c_{45} - U_4 = 25 - (-21) = 46.$$

Diferența cea mai mică fiind 27, care corespunde expeditorului 3, urmează ca beneficiarul 5 să fie aprovizionat în soluția inițială de expeditorul 3.

Pentru beneficiarul 6 avem :

$$c_{16} - U_1 = 40 - (-14) = 54\,;\ c_{26} - U_2 = 45 - (-12) = 57\,;$$
$$c_{36} - U_3 = 25 - 0 = 25\,;\ c_{46} - U_4 = 48 - (-21) = 69.$$

Scanned with OKEN Scanner

Diferența cea mai mică fiind 25, care corespunde expeditorului 3, rezultă ca și beneficiarul 6 să fie aprovizionat de expeditorul 3.

Pentru calcularea valorilor x_{ij} necesare determinării soluției inițiale din noua perioadă, în ecuațiile modelului matematic vom reține numai valorile :

$x_{11}, x_{14}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ (din tabelul 2.1.20) și x_{35}, x_{36}, x_{41}.

Avem :

$$(2.1.03)\quad \begin{cases} (1)\ x_{11} + x_{14} = 43 \\ (2)\ x_{24} = 23 \\ (3)\ x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 40 \\ (4)\ x_{41} = 25 \\ (5)\ x_{11} + x_{41} = 20 \\ (6)\ x_{32} = 26 \\ (7)\ x_{33} = 24 \\ (8)\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 16 \\ (9)\ x_{35} = 23 \\ (10)\ x_{36} = 22 \end{cases}$$

De unde :

$$x_{24} = 23\ ;\ x_{41} = 25\ ;\ x_{32} = 26\ ;\ x_{33} = 24\ ;$$

$x_{35} = 23\ ;\ x_{36} = 22\ ;$ din ecuația (5) rezultă $x_{11} = 20 - x_{41} = 20 - 25 = -5$; din ecuația (1) $x_{14} = 43 - x_{11} = 43 - (-5) = 48$; din ecuația (8) $x_{34} = 16 - (x_{14} + x_{24}) = 16 - 71 = -55$.

Deci soluția inițială este :

Tabelul 2.1.22

	1	2	3	4	5	6	
1	−5			48			43
2				23			23
3		26	24	−55	23	22	40
4	25						25
	20	26	24	16	23	22	

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, soluția dată de tabelul 2.1.22 nu este admisibilă, conținînd doi x_{ij} negativi ($x_{11} = -5$ și $x_{35} = -55$). Pentru eliminarea valorilor negative procedăm ca și în cazurile precedente.

Soluția optimă care se obține este:

Tabelul 2.1.23

u_i \ v_j	25	35	25	26	25	32	
0	0 (20)	25	9	0 (16)	0 (7)	8	43
−9	19	19	0 (7)	11	0 (16)	22	23
−7	22	0 (1)	0 (17)	21	9	0 (22)	40
−12	5	0 (25)	17	26	12	28	25
	20	26	24	16	23	22	

Capitolul al II-lea

PROBLEMA DE TRANSPORT PENTRU PRODUSE (SORTIMENTE) PARȚIAL INTERSCHIMBABILE

Pînă în prezent, la întocmirea planurilor de aprovizionare-desfacere se lua în considerație un sortiment omogen de mărfuri. Cu alte cuvinte, fiecare consumator accepta orice cantitate, în limita necesarului său, de la oricare dintre expeditori.

În practică se ivesc situații cînd anumiți beneficiari solicită cantitatea de care au nevoie numai de la anumiți expeditori. Această situație apare, de pildă, în cazul cînd expeditorii sînt chiar fabricile producătoare și calitatea sortimentului produs diferă de la fabrică la fabrică, iar unii beneficiari au nevoie de un sortiment de o anumită calitate.

O situație asemănătoare se întîlnește în cazul cînd trebuie întocmite planurile de aprovizionare-desfacere pentru mai multe sortimente care sînt parțial interschimbabile. Pentru unii consumatori este indiferent sortimentul pe care-l vor primi; alții însă pun condiții în ceea ce privește cantitățile minime (sau maxime) pe care le solicită din fiecare sortiment.

În cele ce urmează vom distinge trei cazuri:

— în primul caz se va considera că se livrează mai multe produse (sortimente) parțial interschimbabile, fiecare expeditor livrînd un singur produs, iar unii consumatori primind numai anumite produse;

— în al doilea caz se va considera că fiecare expeditor livrează un singur produs, iar unii consumatori primesc produse diferite, punînd condiții în ceea ce privește cantitatea maximă (sau minimă) ce urmează să le fie livrată din anumite produse.

— în al treilea caz se va considera că unii expeditori pot livra mai multe produse interschimbabile. Consumatorii pot primi produse diferite, punînd condiții în ceea ce privește cantitatea maximă (sau minimă) ce li se poate livra din anumite produse.

În continuare vom arăta cum se soluționează problema pentru fiecare caz în parte [1].

[1] Pentru bazele matematice, vezi bibliografia [5].

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, vom considera, de exemplu, următoarea problemă:

I. Fabricile de ulei „Muntenia"-Bucureşti, „Ardealul"-Carei, „Argus"-Constanţa şi „Unirea"-Iaşi trebuie să aprovizioneze organizaţiile comerciale din oraşele Braşov, Buzău şi Tîrgovişte, precum şi două fabrici de conserve situate în Tecuci şi Tg.-Mureş. Uleiul ce urmează să fie livrat fabricilor de conserve trebuie să fie ulei rafinat vinterizat (un ulei de calitate superioară), care este produs numai de fabricile din Bucureşti şi Iaşi.

În tabelul 2.2.01 se dau cantităţile disponibile la fiecare fabrică, cantităţile necesare fiecărui consumator, precum şi distanţele dintre expeditori şi consumatori.

Tabelul 2.2.01

Consumatori / Fabrici	Braşov	Buzău	Tecuci	Tîrgovişte	Tg.-Mureş	Cantitatea disponibilă (sute t)
	1	2	3	4	5	
1 „Muntenia" - Bucureşti	190	152	253	104	472	35
2 „Ardealul"-Carei	517	681	609	674	343	29
3 „Argus"-Constanţa	360	208	258	299	632	28
4 „Unirea"-Iaşi	459	280	170	402	505	20
Cantitatea necesară (sute t)	30	20	25	25	12	112

După cum am arătat, cantităţile de 25, respectiv 12 unităţi, necesare fabricilor de conserve din Tecuci şi Tg.-Mureş, nu pot fi livrate decît de la fabricile „Muntenia"-Bucureşti şi „Unirea"-Iaşi (cu alte cuvinte, în planul optim nu trebuie să fie utilizate rutele Carei—Tecuci, Constanţa—Tecuci, Carei—Tg.-Mureş şi Constanţa—Tg.-Mureş).

Pentru a se evita folosirea acestor rute în planul optim, se va proceda în felul arătat în partea I, cap. IV, § 4. În locul distanţelor reale ale acestor rute, vom considera în mod artificial distanţe foarte mari în raport cu celelalte (de pildă 2 000 km).

În urma acestor modificări se obţine tabelul 2.2.02.

Soluţia optimă a problemei este prezentată în tabelul 2.2.03.

După cum se vede, din acest tabel, datorită procedeului folosit, consumatorii din Tecuci şi Tg.-Mureş sînt aprovizionaţi numai de fabricile din Bucureşti şi Iaşi.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.02

Fabrici \ Consumatori	Braşov	Buzău	Tecuci	Tîrgo-viște	Tg-Mureș	Cantitatea disponibilă
	1	2	3	4	5	
1 „Muntenia"- Bucureşti	190	152	253	104	472	35
2 „Ardealul"-Carei . . .	517	681	2 000	674	2 000	29
3 „Argus"-Constanța . .	360	208	2 000	299	2 000	28
4 „Unirea„-Iaşi	459	280	170	402	505	20
Cantitatea necesară . . .	30	20	25	25	12	112

Tabelul 2.2.03

Fabrici \ Consumatori	Braşov	Buzău	Tecuci	Tîrgo-viște	Tg.-Mureș	Cantitatea disponibilă
	1	2	3	4	5	
1 „Muntenia"- Bucureşti			5	18	12	35
2 „Ardealul"-Carei . .	29					29
3 „Argus"-Constanța .	1	20		7		28
4 „Unirea"-Iaşi			20			20
Cantitatea necesară . .	30	20	25	25	12	112

II. Vom analiza acum cazul în care fiecare expeditor livrează un singur produs, iar unii consumatori care pot primi produse diferite pun condiții referitoare la cantitățile maxime sau minime din anumite produse.

În acest scop vom relua exemplul precedent, unde vom considera că, din cele 25 de unități necesare în Tecuci, 15 unități sînt destinate fabricii de conserve, iar restul de 10 unități consumului populației. Din cele 12 unități necesare în Tg.-Mureș, 5 unități sînt destinate fabricii de conserve din această localitate, iar restul de 7 unități consumului populației în perioada respectivă. În consecință, pentru consumatorii din Tecuci și Tg.-Mureș 15, respectiv 5 unități din uleiul ce urmează să fie

Scanned with OKEN Scanner

livrat trebuie să fie ulei vinterizat (livrat de fabricile din Bucureşti şi Iaşi).

Dacă problema s-ar rezolva după metodele obişnuite, s-ar putea întîmpla ca, în soluţia optimă, unele oraşe în care există fabrici de conserve să fie aprovizionate integral de fabricile din Carei sau Constanţa.

În această situaţie, soluţiile optime obţinute n-ar fi acceptabile. De asemenea, problema nu poate fi rezolvată nici după procedeul folosit în cazul precedent, deoarece nu pentru întreaga cantitate de ulei necesară în Tecuci şi Tg.-Mureş se pune condiţia să fie ulei vinterizat.

Soluţia optimă trebuie determinată în aşa fel, încît să i se asigure fiecărui oraş cantitatea de ulei vinterizat strict necesară (restul cantităţilor putînd fi livrate de oricare fabrică) singurul criteriu urmărit fiind reducerea la minim a totalului de tone-kilometri.

La soluţionarea problemei, în locul fiecărui consumator pentru care se pun condiţii suplimentare în ceea ce priveşte primirea unei anumite cantităţi de ulei vinterizat se vor considera doi consumatori (consumatorul A — populaţia, consumatorul B — fabrica de conserve). Distanţele de la primul consumator (A) la fiecare fabrică sînt distanţe reale. Pentru al doilea consumator (B) se va ţine seama că trebuie să primească numai ulei vinterizat. Distanţele de la acesta la fabricile care produc ulei vinterizat vor fi cele reale, iar distanţele de la fabricile care nu produc ulei vinterizat se vor considera în mod artificial foarte mari (2 000 km). În acest mod, în soluţia optimă, fabricile de conserve vor fi aprovizionate sigur numai de întreprinderile care produc ulei vinterizat.

Cu aceasta, tabelul 2.2.01 devine :

Tabelul 2.2.04

Consumatori / Fabrici	Braşov	Buzău	Tecuci		Tîrgovişte	Tg. Mureş		Cantitatea disponibilă
			A	B		A	B	
	1	2	3	4	5	6	7	
1 „Muntenia"-Bucureşti	190	152	253	253	104	472	472	35
2 „Ardealul"-Carei	517	681	609	2 000	674	343	2 000	29
3 „Argus"-Constanţa	360	208	258	2 000	299	632	2 000	28
4 „Unirea"-Iaşi	459	280	170	170	402	505	505	20
Cantitatea necesară	30	20	10	15	25	7	5	112

Scanned with OKEN Scanner

Din acest tabel se observă că în locul unui singur consumator, cu sediul în Tecuci sau în Tg.-Mureş, apar cîte doi consumatori.

Soluţia optimă a problemei, calculată după metodele cunoscute, este :

Tabelul 2.2.05

Consumatori / Fabrici	Braşov	Buzău	Tecuci		Tîrgoviste	Tg.-Mureş		Cantitatea disponibilă
			A	B		A	B	
	1	2	3	4	5	6	7	
1 „Muntenia"-Bucureşti	8				25		2	35
2 „Ardealul"-Carei	22					7		29
3 „Argus"-Constanţa		20	8					28
4 „Unirea"-Iaşi			2	15			3	20
Cantitatea necesară	30	20	10	15	25	7	5	112

Conform planului optim obţinut, consumatorul din Tecuci va primi 8 unităţi din Constanţa şi 17 unităţi din Iaşi, dintre care 15 unităţi sînt destinate fabricii de conserve. Consumatorul din Tg.-Mureş va primi 7 unităţi din Carei, 2 unităţi din Bucureşti şi 3 unităţi din Iaşi, uleiul primit din Bucureşti şi Iaşi fiind destinat fabricii de conserve din localitate.

III. Vom considera acum cazul cînd trebuie să se întocmească un plan optim de aprovizionare-desfacere în situaţia în care unele centre de producţie pot livra mai multe sortimente interschimbabile, iar unele centre de consum pun condiţii în ceea ce priveşte cantitatea minimă sau maximă pe care o pot primi din anumite sortimente.

Pentru exemplificare, să presupunem că trei fabrici, situate în Turda, Medgidia şi Fieni, trebuie să aprovizioneze cu ciment Portland (P) şi metalurgic (M) 4 consumatori, situaţi în Craiova, Braşov, Bucureşti şi Piteşti. Distanţele dintre fabrici şi consumatori, precum şi cantităţile ce pot fi expediate şi cele solicitate, sînt :

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.06

Consumatori / Fabrici	Craiova	Brașov	București	Pitești	Cantitatea disponibilă
	1	2	3	4	
1 Turda	367	295	472	440	11 000
2 Medgidia	394	325	180	292	20 000
3 Fieni	261	255	123	119	20 000
Cantitatea necesară	7 000	14 000	20 000	10 000	51 000

În ceea ce privește sortimentele ce urmează să fie primite, beneficiarii pun următoarea condiție :

Din cele 7 000 t necesare în Craiova, cel puțin 4 000 t să fie ciment Portland ; din cele 14 000 t necesare în Brașov, cel puțin 5 000 t să fie ciment Portland ; din cele 20 000 t de ciment necesare în București, cel puțin 10 000 să fie ciment Portland, iar din cele 10 000 t de ciment necesare în Pitești cel puțin 2 000 t să fie ciment Portland.

Fabrica din Turda poate livra numai 5 000 t, fabrica din Medgidia numai 15 000 t, iar fabrica din Fieni numai 10 000 t de ciment Portland, deci în total 30 000 t de ciment Portland.

Rezultă că din cele 51 000 t de ciment necesare, 21 000 t trebuie să fie neapărat ciment Portland, față de 30 000 t cît pot livra fabricile.

Pentru soluționarea problemei, fiecare fabrică care produce ambele sortimente (în cazul nostru toate fabricile) va fi considerată ca două fabrici, dintre care una produce numai ciment Portland, iar cealaltă numai ciment metalurgic. Adică, de exemplu, în locul unei singure fabrici în Turda vom considera două fabrici : Turda P., avînd producție de 5 000 t de ciment Portland, și Turda M. producînd 6 000 t de ciment metalurgic. Cu aceasta, în locul a trei fabrici vom avea un număr de 6 fabrici, fiecare producînd cîte un singur sortiment.

În acest fel am redus situația considerată la cazul II.

Pentru soluționare, în locul fiecărui consumator pentru care se pune condiția să primească obligatoriu o anumită cantitate de ciment Portland vom considera doi consumatori, unul putînd primi numai ciment Portland, iar celălalt putînd primi atît Portland, cît și ciment metalurgic.

Astfel, de exemplu, în locul consumatorului din Craiova vom considera că există doi consumatori : Craiova A și Craiova

Scanned with OKEN Scanner

B. Consumatorul Craiova A trebuie să primească 4 000 t de ciment Portland, iar consumatorul Craiova B trebuie să primească 3 000 t de ciment (Portland sau metalurgic). Distanțele de la consumatorul Craiova A la fabricile care produc ciment metalurgic de la care acesta nu poate fi aprovizionat vor fi luate în mod arbitrar foarte mari (2 000 km).

În acest caz, se obține tabelul 2.2.07

Rezolvînd problema cu ajutorul metodei diferențelor comparate [1], se ajunge la o soluție optimă prezentată în tabelul 2.2.08.

Conform soluției optime, consumatorul din Craiova va primi 7 000 t de la Fieni, din care 4 000 t de ciment Portland; consumatorul din Brașov va primi 11 000 t din Turda, din care 5 000 t de ciment Portland și 3 000 t de ciment metalurgic din Fieni; consumatorul din București va primi 20 000 t din Medgidia, din care 15 000 t Portland, și, în sfîrșit, consumatorul din Pitești va primi 10 000 t din Fieni, din care 6 000 t de ciment Portland.

În exemplul luat, pentru simplificare, s-au considerat numai două sortimente. În practică se pot întîlni probleme în care intervin mai multe sortimente parțial interschimbabile. În principiu însă, metoda de soluționare rămîne aceeași.

Pentru o mai bună precizare, vom mai lua un exemplu ipotetic. Să presupunem că 3 expeditori livrează patru produse (A, B, C, D) la 4 destinatari. Cantitățile care pot fi expediate de la cei trei producători sînt date în tabelul 2.2.09.

Consumatorii pun următoarele condiții:

Consumatorul 1 are nevoie de 50 t, din care cel puțin 5 t din produsul A și cel puțin 20 t din A și C.

Consumatorul 2 are nevoie de 70 t, din care cel puțin 15 t din sortimentul A și cel mult 5 t din sortimentul D.

Consumatorul 3 are nevoie de 60 t, din care cel puțin 32 t din produsul A și B, cel puțin 17 t din produsul B și D și cel puțin 7 t din produsul B.

Consumatorul 4 are nevoie de 60 t, putînd primi oricare dintre cele 4 produse.

Cheltuielile de transport pe tonă — aceleași pentru toate sortimentele — sînt date în tabelul 2.2.10

Pentru a obține soluția optimă, care să satisfacă condițiile impuse, se va proceda astfel:

În locul fiecărui expeditor vom considera mai mulți expeditori, fiecare putînd livra un singur produs. Astfel, în locul expeditorului 1 vom considera 3 expeditori, primul putînd livra

[1] Pentru problema noastră, din cauza multiplelor degenerări care intervin, preferăm metoda diferențelor comparate celorlalte metode cunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.07

Fabrici \ Consumatori	Craiova A	Craiova B	Brașov A	Brașov B	Buc. A	Buc. B	Pitești A	Pitești B	Cantitatea disponibilă
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1 Turda P.	367	367	295	295	472	472	440	440	5 000
2 Turda M.	2 000	367	2 000	295	2 000	472	2 000	440	6 000
3 Medgidia P	394	394	325	325	180	180	292	292	15 000
4 Medgidia M	2 000	394	2 000	325	2 000	180	2 000	292	5 000
5 Fieni P.	261	261	255	255	123	123	119	119	10 000
6 Fieni M.	2 000	261	2 000	255	2 000	123	2 000	119	10 000
Cantitatea necesară	4 000	3 000	5 000	9 000	10 000	10 000	2 000	8 000	51 000

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.08

Consumatori / Fabrici	Craiova		Brașov		București		Pitești		Cantitatea disponibilă
	A	B	A	B	A	B	A		
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1 Turda P.			5 000						5 000
2 Turda M.				6 000					6 000
3 Medgidia P.					10 000	5 000			15 000
4 Medgidia M.						5 000			5 000
5 Fieni P.	4 000						2 000	4 000	10 000
6 Fieni M.		3 000		3 000				4 000	10 000
Cantitatea necesară	4 000	3 000	5 000	9 000	10 000	10 000	2 000	8 000	51 000

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.09

Produse / Expeditori	A	B	C	D	Total
Expeditor 1	20	—	30	20	70
Expeditor 2	50	10	60	10	130
Expeditor 3	—	20	20	—	40

Tabelul 2.2.10

Consumatori / Expeditori	1	2	3	4	Cantitatea disponibilă
1	80	50	90	110	70
2	120	90	80	100	130
3	140	160	70	95	40
Cantitatea necesară	50	70	60	60	240

numai produsul A (20 t), al doilea numai produsul C (30 t), al treilea putînd livra numai 20 t din produsul D.

În locul expeditorului 2 vom considera 4 expeditori, fiecare livrînd, de asemenea, un singur produs, iar în locul expeditorului 3 vom considera 2 expeditori.

În ceea ce privește consumatorii, vom proceda astfel: În locul consumatorului 1, care trebuie să primească 50 t, vom considera un consumator care trebuie să primească 5 t din produsul A (aceasta este o condiție obligatorie), un consumator care trebuie să primească 15 t din produsele A și C și un al treilea consumator care primește restul de 30 t din oricare dintre produsele A, B , C sau D. Cu aceasta vom fi siguri că consumatorul 1 va primi din cele 50 t cel puțin 5 t din produsul A și cel puțin 20 t din produsele A și C.

În locul consumatorului 2, care trebuie să primească 70 t, vom considera, de asemenea, mai mulți consumatori. Primul va primi 15 t din produsul A. Pentru consumatorul 2 se mai pune condiția să nu primească mai mult de 5 t din produsul D, ceea ce echivalează cu a primi cel puțin 65 t din produsele A, B și C, din care pentru 15 t s-a pus condiția să fie primite din sortimentul A. Deci vom considera un alt consumator care

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.11

Expeditori \ Consumatori		I			II			III				IV	Cantitatea disponibilă
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1 A	80	80	80	50	50	50	90	1 000	1 000	90	110	20
2	1 C	1 000	80	80	1 000	50	50	1 000	1 000	1 000	90	110	30
3	1 D	1 000	1 000	80	1 000	1 000	50	1 000	90	1 000	90	110	20
4	2 A	120	120	120	90	90	90	80	1 000	1 000	80	100	50
5	2 B	1 000	1 000	120	1 000	90	90	80	80	80	80	100	10
6	2 C	1 000	120	120	1 000	90	90	1 000	1 000	1 000	80	100	60
7	2 D	1 000	1 000	120	1 000	1 000	90	1 000	80	1 000	80	100	10
8	3 B	1 000	1 000	140	1 000	160	160	70	70	70	70	95	20
9	3 C	1 000	1 000	140	1 000	160	160	1 000	1 000	1 000	70	95	20
Cantitatea necesară		5	15	30	15	50	5	25	10	7	18	60	240

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2.12

Expeditori \ Consumatori		1			2			3				4	Cantitatea disponibilă
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1 A	5			15								20
2	1 C					25	5						30
3	1 D			20									20
4	2 A							2				48	50
5	2 B							10					10
6	2 C		15	10		25						10	60
7	2 D								10				10
8	3 B							13		7			20
9	3 C										18	2	20
Cantitatea necesară		5	15	30	15	50	5	25	10	7	18	60	240
		50			70			60				60	240

Scanned with OKEN Scanner

trebuie să primească 50 t din produsele A, B şi C. În sfîrşit, vom mai considera un al treilea consumator, care trebuie să primească restul de 5 t indiferent din ce produs.

În locul consumatorului 3, care trebuie să primească 60 t, vom considera de asemenea mai mulţi consumatori. Primul va trebui să primească 25 t din produsele A şi B, un al doilea care să primească 10 t din produsele B şi D, un al treilea care să primească 7 t din produsul B şi, în sfîrşit, un al patrulea care să primească restul de 18 t din orice produs.

Consumatorul 4, nepunînd nici o condiţie, poate primi oricare dintre cele patru produse.

Cheltuielile de transport de la expeditorii la consumatorii care nu pot fi aprovizionaţi de aceştia vor fi luate în mod arbitrar egale cu 1 000.

Aceste modificări duc la obţinerea situaţiei din tabelul 2.2.11.

Aplicînd apoi una dintre metodele cunoscute, vom obţine planul optim arătat în tabelul nr. 2.2.12.

Procedeul folosit a permis obţinerea soluţiei optime, care satisface toate condiţiile impuse.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al III-lea

PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE

În capitolul precedent am văzut că în soluționarea unor probleme de transport intervin unele situații cînd anumite rute nu pot fi utilizate. În acest caz, pentru ca rutele respective să nu intervină în planul optim, în locul cheltuielilor (sau al distanțelor) corespunzătoare acestor rute s-au luat în mod arbitrar cheltuieli (distanțe) foarte mari.

În practică intervin însă cazuri cînd se pune numai condiția limitării cantităților ce pot fi transportate pe anumite rute și nu completa lor excludere.

Dacă avem, de pildă, o problemă de transport în care suma cantităților necesare este mai mică decît suma cantităților disponibile, problema se soluționează, după cum s-a văzut, prin introducerea unui consumator fictiv. Cantitățile repartizate acestui consumator în realitate nu se transportă, ci rămîn ca stocuri la producători. Pînă în prezent nu s-a pus nici o condiție în ceea ce privește cantitatea maximă ce poate rămîne ca stoc la fiecare producător, astfel încît în cursul soluționării problemei pot să se ivească situații cînd întregul stoc rămîne la un singur producător.

În general trebuie să se țină seama de capacitățile de depozitare existente la fiecare producător, astfel încît se pune condiția ca fiecare producător „să livreze" consumatorului fictiv o cantitate cel mult egală cu capacitatea de depozitare la producătorul respectiv. În acest fel, limitînd cantitățile ce pot fi expediate consumatorului fictiv, avem de soluționat *o problemă de transport cu capacități limitate.*

O situație analogă este aceea în care suma cantităților necesare este mai mare decît suma cantităților disponibile, în care caz, pentru soluționarea problemei, se introduce un expeditor fictiv.

Cantităţile pe care acest expeditor le va livra fiecărui consumator, conform planului optim, vor fi tocmai cantităţile ce nu vor putea fi primite de consumatorii respectivi. Dacă se pune condiţia ca anumiţi beneficiari să primească integral cantităţile solicitate, înseamnă că în planul optim rutele de la expeditorul fictiv la aceşti beneficiari vor trebui să fie excluse. Pentru aceasta este suficient să luăm în mod arbitrar drept cheltuieli de transport pentru aceste rute costuri foarte mari faţă de restul cheltuielilor de transport.

Uneori, pentru anumiţi beneficiari, se poate pune condiţia primirii obligatorii a unui anumit procent din cantitatea solicitată. În acest caz, expeditorul fictiv nu va mai putea livra acestor beneficiari orice cantitate, ci va exista o limitare a acesteia, ceea ce de asemenea va conduce la o problemă de transport cu capacităţi limitate. În afară de cele două cazuri enunţate, o serie întreagă de alte probleme economice au ca model matematic modelul problemei de transport cu capacităţi limitate.

Din punct de vedere matematic, o problemă de transport cu capacităţi limitate poate fi formulată astfel:

De exemplu, m expeditori trebuie să livreze un anumit produs la n destinatari. Folosind notaţiile cunoscute şi notînd cu d_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta pe ruta (i, j), modelul matematic al problemei este următorul:

Să se determine necunoscutele x_{ij} astfel încît:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} = \text{minim}, \tag{2.3.01}$$

cu respectarea următoarelor condiţii:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots, m), \tag{2.3.02}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots, n), \tag{2.3.03}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{(pentru toţi } i \text{ şi } j) \tag{2.3.04}$$

şi

$$x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad \text{(pentru anumiţi } i \text{ şi } j). \tag{2.3.05}$$

S-a presupus că:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \tag{2.3.06}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident că condiția (2.3.05) poate fi considerată ca avînd loc pentru toate rutele (i,j); pentru cele care nu au nici o restricție se poate lua $d_{ij} = M$, M fiind un număr foarte mare, care nu va influența cu nimic soluția problemei, iar dacă anumite rute trebuie să fie excluse, atunci se va lua $d_{ij} = 0$.

Datele unei probleme de transport cu capacități limitate se trec într-un tabel de forma :

Tabelul 2.3.01

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	.....	n	Cantitatea disponibilă
1	c_{11} d_{11}	c_{12} d_{12}	c_{13} d_{13}	.....	c_{1n} d_{1n}	a_1
2	c_{21} d_{21}	c_{22} d_{22}	c_{23} d_{23}	.....	c_{2n} d_{2n}	a_2
3	c_{31} d_{31}	c_{32} d_{32}	c_{33} d_{33}	.....	c_{3n} d_{3n}	a_3
. . .	....	....	....	....	....	....
m	c_{m1} d_{m1}	c_{m2} d_{m2}	c_{m3} d_{m3}	....	c_{mn} d_{mn}	a_m
Cantitatea necesară	b_1	b_2	b_3	....	b_n	

Înainte de a trece la soluționarea propriu-zisă a problemei trebuie să ne convingem că datele nu sînt contradictorii. Pentru aceasta se fac sumele cantităților d_{ij} de pe fiecare linie și coloană și se verifică dacă ele sînt mai mari sau cel puțin egale cu a_i sau b_j corespunzător. Dacă, de pildă, pentru o anumită coloană j toate căsuțele sînt supuse la limitări și avem :

$$d_{1j} + d_{2j} + \ldots + d_{mj} < b_j$$

problema nu se poate soluționa, deoarece, chiar dacă în fiecare căsuță a coloanei am repartiza cantitatea maximă d_{ij}, suma cantităților repartizate ar fi mai mică decît cantitatea b_j necesară destinatarului respectiv.

În cazul în care avem :

$$d_{1j} + d_{2j} + \ldots + d_{mj} = b_j,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci coloana respectivă poate fi exclusă din calcul, întrucît în această situaţie avem o singură posibilitate, şi anume să plasăm în fiecare căsuţă a coloanei j cantitatea maximă d_{ij}. (Consideraţiile făcute mai sus pentru coloane sînt valabile şi pentru linii).

Vom arăta acum cum poate fi rezolvată o problemă de transport cu capacităţi limitate pe baza următorului exemplu:

Un număr de 5 expeditori trebuie să livreze un anumit produs la 5 destinatari. Datele problemei sînt:

Tabelul 2.3.02

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5 | 50	80	5 | 40	6 | 80	9 | 70	21
2	40	7 | 50	6 | 60	40	70	14
3	50	7 | 40	70	6 | 80	80	17
4	80	7 | 60	60	90	60	12
5	5 | 70	3 | 50	5 | 30	4 | 70	2 | 90	19
Cantitatea necesară	20	18	15	17	13	83

După cum rezultă din acest tabel, un număr de 14 rute sînt limitate în ceea ce priveşte capacitatea de transport. Pentru linia 5, toate rutele corespunzătoare au capacităţile de transport limitate, suma acestora fiind 19, egală cu cantitatea ce trebuie expediată de la expeditorul 5 ($a_5 = 19$). În această situaţie, cantităţile ce vor fi expediate de la acest expeditor la cei 5 destinatari sînt determinate în mod unic, şi anume:

$$x_{51} = 5\,;\ x_{52} = 3\,;\quad x_{53} = 5\,;\ x_{54} = 4\,;\ x_{55} = 2.$$

Rezultă că în această situaţie problema va avea 4 centre de expediţie şi 5 centre de destinaţie. Scăzînd din necesarul fiecărui destinatar cantitatea care a fost repartizată să fie primită de la expeditorul 5, tabelul 2.3.02 devine:

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.3.03

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5 | 50	80	5 | 40	6 | 80	9 | 70	21
2	40	7 | 50	6 | 60	40	70	14
3	50	7 | 40	70	6 | 80	80	17
4	80	7 | 60	60	90	60	12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

În noua situație, avem limitări pentru un număr de 9 rute. Ca și în cazul problemei de transport obișnuite, calculul pornește de la o soluție inițială. Pentru obținerea acesteia putem folosi oricare dintre procedeele cunoscute. Totuși, în unele cazuri se poate ajunge la asemenea situație cînd, datorită faptului că ultimele căsuțe care trebuie ocupate au capacitățile limitate, nu se poate obține o soluție admisibilă. Într-o astfel de situație va trebui să efectuăm o serie de modificări astfel încît să obținem o soluție inițială admisibilă. Pentru problema noastră vom alege soluția inițială după procedeul elementului minim pe coloană. Ținînd seama de limitarea din fiecare căsuță, avem :

Tabelul 2.3.04

Expeditori \ Destinatari	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	1	1	5	6		21
2	14					14
3		7		6		17
4		7	5			12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

Scanned with OKEN Scanner

După repartizarea cantităților în primele 3 coloane mai rămîn disponibile : în prima linie 14 unități, iar în linia a treia 10 unități, cu care va trebui să satisfacem necesarul de 13 unități al destinatarului 4 și necesarul de 11 unități al destinatarului 5.

Rezultă că în coloana 4, în căsuțele (1,4) și (3,4), vor trebui plasate cele 13 unităţi — necesarul destinatarului 4. Aceasta nu este însă posibil, deoarece ambele căsuțe au capacitatea maximă 6. Din acest motiv, deoarece după satisfacerea primilor trei beneficiari mai pot face livrări numai expeditorii 1 și 3, beneficiarul 4 nu va putea fi satisfăcut.

Efectuînd o modificare în repartiția dată primilor 3 beneficiari, de pildă luînd $x_{11} = 2$ în loc de $x_{11} = 1$ și $x_{21} = 13$ în loc de $x_{21} = 14$, determinarea soluției inițiale se va putea continua astfel :

Tabelul 2.3.05

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	2	1	5*	6*	7	21
2	13			1		14
3		7*		6*	4	17
4		7*	5			12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

În tabelul de mai sus, căsuțele în interiorul cărora a fost plasată cantitatea maxim posibilă au fost însemnate cu cîte o steluță.

Această notație se va folosi în tot cursul acestui capitol. Numărul locurilor ocupate este 12, din care 5 sînt ocupate la capacitatea maximă (căsuțele însemnate cu cîte o steluță).

În continuare, ca de obicei, se verifică dacă soluția obținută este optimă. Dacă se constată că soluția nu este optimă, se procedează la îmbunătățirea ei. Pentru verificarea optimalității soluției, ca și în cazul problemei obișnuite de transport,

Scanned with OKEN Scanner

se determină numerele U_i, V_j prin soluționarea sistemului de ecuații de forma :

$$U_i + V_j = c_{ij},$$

în care căsuțele (i, j) sînt locuri ocupate.

Deosebirea față de cazul soluționării problemei obișnuite de transport constă în faptul că pentru formarea sistemului de ecuații se iau în considerare numai căsuțele ocupate și neînsemnate cu steluță. În cazul nostru, numărul căsuțelor ocupate și neînsemnate cu steluță este 7, cu unul mai puțin decît numărul necesar ($m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$). Pentru soluționarea problemei vom proceda deci ca în situația degenerării, luînd suplimentar fie una dintre căsuțele libere, fie una dintre căsuțele marcate cu steluță. În cazul nostru vom considera suplimentar, de pildă, căsuța (1,3).

Deci vom lua drept locuri ocupate numai căsuțele (1,1); (1,2); (1,3); (1,5); (2,1); (2,4); (3,5); (4,3).

În acest caz, sistemul de ecuații în U și V corespunzător este :

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 50 \\ U_1 + V_2 = 80 \\ U_1 + V_3 = 40 \\ U_1 + V_5 = 70 \\ U_2 + V_1 = 40 \\ U_2 + V_4 = 40 \\ U_3 + V_5 = 80 \\ U_4 + V_3 = 60 \end{cases}$$

Valorile U și V, luînd $U_1 = 0$, precum și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, sînt prezentate în tabelul 2.3.06.

Și în tabelul de diferențe $c_{ij} - U_i - V_j$, căsuțele însemnate își păstrează steluța.

Criteriul de verificare a optimalității unei soluții constă în următoarele :

În tabelul de diferențe $c_{ij} - U_i - V_j$ *în locurile libere nu trebuie să apară diferențe negative, iar în locurile ocupate la maxim (cele marcate) nu trebuie să apară diferențe pozitive.*

Prima condiție coincide cu condiția de optim, în cazul problemei obișnuite de transport.

Să cercetăm în ce constă a doua condiție.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.3.06

V_j / U_i	50	80	40	50	70
0	0	0	0*	30*	0
—10	0	—20	30	0	10
10	—10	—50*	20	20*	0
20	10	—40*	0	20	—30

După cum se ştie, valoarea $d_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$ arată cu cît se modifică totalul cheltuielilor de transport în cazul cînd pe ruta (i,j) se transportă o unitate.

Diferenţele d_{ij} pozitive arată că repartizînd în căsuţa (i, j) o cantitate oarecare, totalul cheltuielilor se vor majora cu d_{ij}, multiplicat cu cantitatea repartizată. Dacă vom reduce cantitatea aflată în căsuţa (i, j), costul total al transporturilor va scădea cu d_{ij}, multiplicat cu cantitatea cu care s-a redus.

În cazul cînd căsuţa (i,j) este ocupată la maxim, cantitatea înscrisă în această căsuţă nu mai poate fi decît micşorată.

Rezultă că pentru căsuţele ocupate la maxim, diferenţele d_{ij} pozitive indică posibilitatea îmbunătăţirii soluţiei.

În tabelul 2.3.06, corespunzător locurilor libere apar două diferenţe negative (—20 şi —30) şi două diferenţe pozitive în căsuţele însemnate cu steluţă (20 şi 30). Dintre acestea vom alege pe cea mai mare în valoare absolută (30). (Menţionăm că este indiferent dacă ne fixăm asupra lui + 30 sau —30). Ne vom fixa asupra lui +30, care apare în căsuţa (2,3).

Ciclul corespunzător este arătat în tabelul 2.3.05.

Numerotînd colţurile ciclului începînd de la căsuţa ocupată la maxim (marcată), vom alege cantitatea cea mai mică din colţurile impare, adică 6. Această cantitate ar trebui adăugată cantităţilor din colţurile pare ale ciclului. Însă colţul 4 al ciclului corespunzător căsuţei (1,1) este o căsuţă cu capacitate limitată, cantitatea maximă ce poate fi introdusă în căsuţa respectivă fiind 5 (vezi tabelul 2.3.02). Deoarece în căsuţa (1,1) este deja repartizată o cantitate de 2 unităţi (tabelul 2.3.05), rezultă că în această căsuţă mai pot fi repartizate maxim 3

Scanned with OKEN Scanner

unități. Adăugînd și scăzînd cîte 3 unități în fiecare dintre căsuțele ciclului găsit, obținem următoarea soluție :

Tabelul 2.3.07

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5*	1	5*	3	7	21
2	10			4		14
3	0	7*		6*	4	17
4		7*	5			12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

În soluția de mai sus, căsuța (1,4) nu va mai fi însemnată, nefiind ocupată la capacitatea maximă, iar căsuța (1,1) devine însemnată.

În soluția din tabelul 2.3.07, numărul căsuțelor ocupate (și neînsemnate) continuă să fie 7. Pentru a calcula valorile U_i și V_j corespunzătoare noii soluții, vom considera, ca și în pasul precedent, căsuța (1,3) drept ocupată și neînsemnată.

Valorile U_i, V_j, precum și diferențele $d_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$, sînt :

Tabelul 2.3.08

U_i / V_j	80	80	40	80	70
0	—30*	0	0	0	0
—40	0	10	60	0	40
10	—40	—50*	20	—10*	0
20	—20	—40*	0	—10	—30

Observăm că în căsuțele însemnate nu apar diferențe pozitive, dar că în căsuțele libere apar diferențe negative, cea mai mică fiind —40 și corespunzînd căsuței (3,1).

Ciclul corespunzător acestei căsuțe este arătat în tabelul 2.3.07.

Scanned with OKEN Scanner

Cantitatea cea mai mare care se poate scădea din colțurile pare este 3. Printre colțurile impare ale ciclului figurează căsuța (1,5), care are capacitatea limitată la 9 unități. În această căsuță, fiind deja plasată cantitatea de 7 unități, urmează că mai pot fi repartizate încă două unități. Noua soluție este:

Tabelul 2.3.09

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5*	1	5*	1	9*	21
2	8			6		14
3	2	7*		6*	2	17
4		7*	5		X	12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

În această nouă soluție, numărul căsuțelor ocupate și nemarcate este egal cu 7. Pentru a nu avea degenerare, vom considera din nou căsuța (1,3) ca fiind nemarcată.

Valorile U_i, V_j, precum și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, sînt:

Tabelul 2.3.10

U_i / V_j	80	80	40	80	110
0	—30*	0	0*	0	—40*
—40	0	10	60	0	0
—30	0	—10*	60	30*	0
20	—20	—40*	0	—10	—70

În căsuțele însemnate apare o diferență pozitivă (30) în căsuța (3,4), iar în căsuțele libere cea mai mică diferență negativă este — 70 și corespunde căsuței (4,5).

Scanned with OKEN Scanner

Ciclul corespunzător căsuței (4,5) este dat în tabelul 2.3.09.

Cantitatea cea mai mică din colțurile pare este 1. Printre căsuțele situate în colțurile impare se află și căsuța (1,3), care este ocupată la maximum (această căsuță însemnată a fost considerată în calcul ca fiind neocupată). Deci cantitatea maximă cu care se pot modifica cantitățile din căsuțele ciclului este zero, soluția rămînînd aceeași.

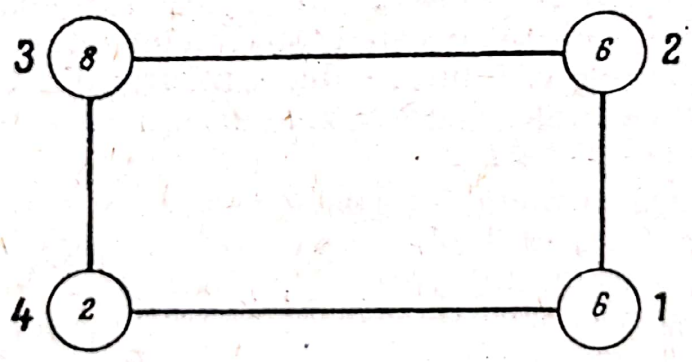
Numărul căsuțelor ocupate și neînsemnate va fi completat cu căsuța (4,5), care va fi considerată ca fiind ocupată.

Valorile U_i, V_j, precum și diferențele $c_{ij} - U_i - V_j$, sînt:

Tabelul 2.3.11

U_i \ V_j	80	80	110	80	110
0	—30*	0	—70*	0	—40*
—40	0	10	10	0	0
—30	0	10*	10	30*	0
—50	50	30*	0	60	0

Se observă că în căsuțele libere din acest tabel nu mai apare nici o diferență negativă. În căsuțele însemnate apar mai multe diferențe pozitive, cea mai mare fiind 30, corespunzătoare căsuțelor (3,4) și (4,2). Ne vom fixa asupra căsuței (3,4), al cărei ciclu este:



Deoarece ciclul corespunde unei căsuțe marcate, vom considera cantitatea cea mai mică din colțurile impare. Această cantitate este de 6 unități. Dintre căsuțele ciclului situate în

Scanned with OKEN Scanner

colțurile pare, nici una nu are capacitatea limitată. Deci cantitățile din căsuțele ciclului se pot modifica cu 6 unități. Noua soluție este :

Tabelul 2.3.12

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5*	1	5*	1	9*	21
2	2			12		14
3	8	7*			2	17
4		7*	5		X	12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

Pentru verificarea optimalității, observăm că atît ultima soluție, cît și soluția precedentă (tabelul 2.3.09) nu diferă în ceea ce privește poziția căsuțelor ocupate și nemarcate. Rezultă că tabelul 2.3.11 va rămîne nemodificat, iar căsuța (3,4) va deveni o căsuță nemarcată.

În tabelul 2.3.11, apărînd diferențe pozitive în două căsuțe marcate, soluția continuă să nu fie optimă. Cea mai mare diferență (+30) corespunde căsuței (4,2), al cărei ciclu este arătat în tabelul 2.3.12.

Întrucît acest ciclu se referă la o căsuță ocupată și marcată, vom considera cantitatea cea mai mică din căsuțele situate în colțurile impare ale ciclului, care este 1. Modificînd cu această cantitate pe cele din căsuțele ciclului, se obține soluția din tabelul 2.3.13.

Numărul căsuțelor ocupate și neînsemnate este opt, așa cum reiese din tabelul 2.3.14.

Se observă că nici soluția dată de tabelul 2.3.13 nu este optimă, deoarece în căsuțele libere apar trei diferențe negative. Diferența negativă cea mai mică este — 20, care apare în căsuța (2,2). Ciclul corespunzător acestei căsuțe este arătat în tabelul 2.3.13.

Cantitatea cea mai mică din colțurile pare este 1. Modificînd cantitățile din căsuțele ciclului cu această cantitate, obținem soluția din tabelul 2.3.15.

În noua soluție, întrucît apar numai șapte locuri ocupate și nemarcate, pentru verificarea optimalității vom considera și căsu-

Tabelul 2.3.13

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5*	2	5*		9*	21
2	1			13		14
3	9	7*			1	17
4		6	5		1	12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

Tabelul 2.3.14

U_i \ V_j	30	60	60	30	60
20	0*	0	—40*	30	—10*
10	0	—20	—10	0	0
20	0	—40*	—10	30	0
0	50	0	0	60	0

Tabelul 2.3.15

Destinatari / Expeditori	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	5*	2	5*		9*	21
2		1		13		14
3	10	7*				17
4		5	5		2	12
Cantitatea necesară	15	15	10	13	11	64

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.3.16

ța (2,1) ca fiind un loc ocupat. Deci vom avea :

V_j / U_i	50	60	60	50	60
20	—20*	0	—40*	10	—10*
—10	0	0	10	0	20
0	0	—20*	10	30	20
0	30	0	0	40	0

În tabelul de diferențe $c_i - U_i - V_j$, în căsuțele însemnate, nici una dintre diferențe nu este pozitivă, iar în locurile libere nici una dintre diferențe nu este negativă. Rezultă că soluția dată în tabelul 2.3.15 este optimă. Această soluție folosește 11 rute, dintre care 4 rute sînt utilizate la capacitatea maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al IV-lea

PROBLEMA DE TRANSPORT CU CENTRE INTERMEDIARE

O categorie importantă de probleme, adesea întîlnită în practică, o constituie problemele de transport cu centre intermediare. Astfel de probleme se pun, de exemplu, la determinarea unui plan optim de transport al unei materii prime de la centrele de exploatare la fabricile prelucrătoare în cazul cînd trebuie să se țină seama și de transportul produsului finit de la fabrici la centrele de consum. În acest caz, centrele intermediare sînt fabricile unde sosește materia primă pentru prelucrare și de unde pleacă apoi sub formă de produs finit la centrele de consum. În afară de fabrici, drept centre intermediare pot fi luate diferite depozite (unde trebuie transportat un anumit produs pentru a fi apoi distribuit unor centre consumatoare), diferite centre de prelucrare ș.a.

În cazul în care cantitatea disponibilă în centrele de expediție (inițiale) sau cantitatea necesară centrelor de consum (finale) este egală cu capacitatea centrelor intermediare, rezolvarea problemei se reduce la soluționarea a două probleme obișnuite de transport : o problemă de transport de la centrele inițiale la centrele intermediare și a doua de la centrele intermediare la centrele finale. De pildă, dacă trebuie să rezolvăm o astfel de problemă pentru fabricile de zahăr, știind că toate fabricile vor lucra la capacitatea maximă, atunci problema cu centre intermediare se poate defalca în două : o problemă de transport pentru sfecla de zahăr din bazinele de recoltare la fabricile de zahăr și o problemă de transport pentru zahăr de la fabrici la consumatori.

Problema nu se mai poate defalca îndată ce capacitățile fabricilor întrec cantitățile disponibile de materie primă. În acest caz se poate, de pildă, ca din punctul de vedere al transportului materiei prime să fie avantajos ca o anumită fabrică să lucreze la capacitatea maximă, aceasta fiind însă dezavan-

Scanned with OKEN Scanner

tajos din punctul de vedere al transportului produsului finit. În astfel de situaţii este necesară o metodă de calcul specială, care să permită soluţionarea combinată a problemei.

Un caz special al problemei de transport cu centre intermediare este acela în care capacităţile centrelor intermediare pot fi considerate, faţă de cantităţile ce urmează să treacă prin aceste centre, practic nelimitate. Pentru exemplificare să presupunem că într-o regiune trebuie transportaţi porci, în greutate totală de 200 000 kg, de la 4 G.A.S. la 3 abatoare, carnea fiind apoi distribuită la cinci centre de consum. Să presupunem că la orice abator se pot tăia porci în greutate totală practic nelimitată. Scopul problemei este de a determina greutatea totală a porcilor ce trebuie să fie tăiaţi la fiecare abator, de la ce gospodării urmează să-i primească şi căror consumatori urmează să le livreze carnea, astfel încît totalul cheltuielilor de transport să fie minim. Datele problemei sînt :

Tabelul 2.4.01

Abatoare	G.A.S				Centre de consum				
	1	2	3	4	1	2	3	4	5
1	50	45	30	54	20	23	16	0	15
2	40	30	50	65	24	0	13	14	20
3	80	45	70	55	0	16	20	25	27
	50 000	75 000	25 000	50 000	15 000	45 000	50 000	70 000	30 000

În acest tabel, în partea stîngă, pe linii sînt trecute centrele intermediare (abatoarele), iar pe coloane — centrele iniţiale (G.A.S.), în interiorul tabelului fiind date cheltuielile de transport pe kg de porc viu într-o anumită unitate monetară (de pildă în lei), în ultima linie fiind date cantităţile ce urmează să fie transportate de la fiecare G.A.S. În partea dreaptă a tabelului se dau cheltuielile de transport de la cele trei abatoare la punctele de consum, în ultima linie dîndu-se cantitatea necesară fiecărui consumator.

Pentru soluţionarea problemei se stabilesc în primul rînd cheltuielile de transport de la fiecare G.A.S. la fiecare centru de consum.

Acestea se determină luînd pentru fiecare centru iniţial (G.A.S.) şi fiecare centru de consum cheltuielile de transport de la G.A.S. respectiv la fiecare abator, adunate cu cheltuielile de transport de la abator la centrul de consum respectiv şi alegînd

Scanned with OKEN Scanner

apoi suma minimă. De pildă, pentru a determina costul de transport între centrul inițial 1 și centru de consum 1, vom aduna elementele primei coloane din partea stîngă a tabelului 2.4.01 cu elementele primei coloane din partea dreaptă și vom alege suma minimă. Avem: $50 + 20 = 70$; $40 + 24 = 64$; $80 + 0 = 80$. Suma minimă fiind 64, rezultă că de la centrul inițial 1 la centrul de consum 1 costul de transport este 64, prin centrul intermediar (abatorul) 2. Pentru a determina costul de transport între G.A.S. 1 și centrul de consum 2, vom alege suma minimă dintre sumele elementelor coloanei 1 din stînga cu elementele coloanei 2 din partea dreaptă a tabelului 2.4.01. Avem: $50 + 23 = 73$; $40 + 0 = 40$; $80 + 16 = 96$. Suma minimă este 40, prin intermediul centrului 2. Tot astfel se determină costurile de transport între toate centrele inițiale și centrele de consum. Acestea sînt:

Tabelul 2.4.02

Centre de consum / G.A.S.	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1	**2** 64	**2** 40	**2** 53	**1** 50	**2** 60	50 000
2	**3** 45	**2** 30	**2** 43	**2** 14	**2** 50	75 000
3	**1** 50	**2** 50	**1** 46	**1** 30	**1** 45	25 000
4	**3** 55	**3** 71	**1** 70	**1** 54	**1** 69	50 000
Cantitatea necesară	15 000	45 000	50 000	70 000	20 000	200 000

Numerele scrise sus în stînga fiecărei căsuțe arată prin intermediul cărui abator (centru intermediar) s-a calculat costul de transport.

Rezolvînd problema în mod obișnuit, obținem soluția optimă din tabelul 2.4.03.

Ca și în tabelul 2.4.02, și în acest tabel am notat în stînga sus abatoarele prin intermediul cărora am calculat cheltuielile de transport.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.4.03

Centre de consum / G.A.S.	1	2	3	4	5	Cantitatea disponibilă
1		2 40 000	2 10 000			50 000
2		2 5 000		2 70 000		75 000
3			1 25 000			25 000
4	3 15 000		1 15 000		1 20 000	50 000
Cantitatea necesară	15 000	45 000	50 000	70 000	20 000	200 000

Conform soluției optime din tabelul 2.4.03, avem :

— G.A.S. 1 va livra 40 000 kg consumatorului 2, porcii fiind tăiați la abatorul 2, și 10 000 kg consumatorului 3, porcii fiind tăiați de asemenea la abatorul 2.

— G.A.S. 2 livrează consumatorilor 2 și 4, 5 000 kg și, respectiv, 70 000 kg, porcii fiind tăiați la abatorul 2.

— G.A.S. 3 livrează 25 000 kg consumatorului 3, porcii fiind tăiați la abatorul 1.

— G.A.S. 4 livrează 15 000 kg consumatorului 1, porcii fiind tăiați la abatorul 3, 15 000 kg consumatorului 3, porcii fiind tăiați la abatorul 1, și 20 000 kg consumatorului 5, porcii fiind tăiați la abatorul 1.

Cu aceasta s-au determinat și cantitățile ce vor fi tăiate la fiecare abator : 60 000 kg la abatorul 1, 125 000 kg la abatorul 2 și 15 000 la abatorul 3.

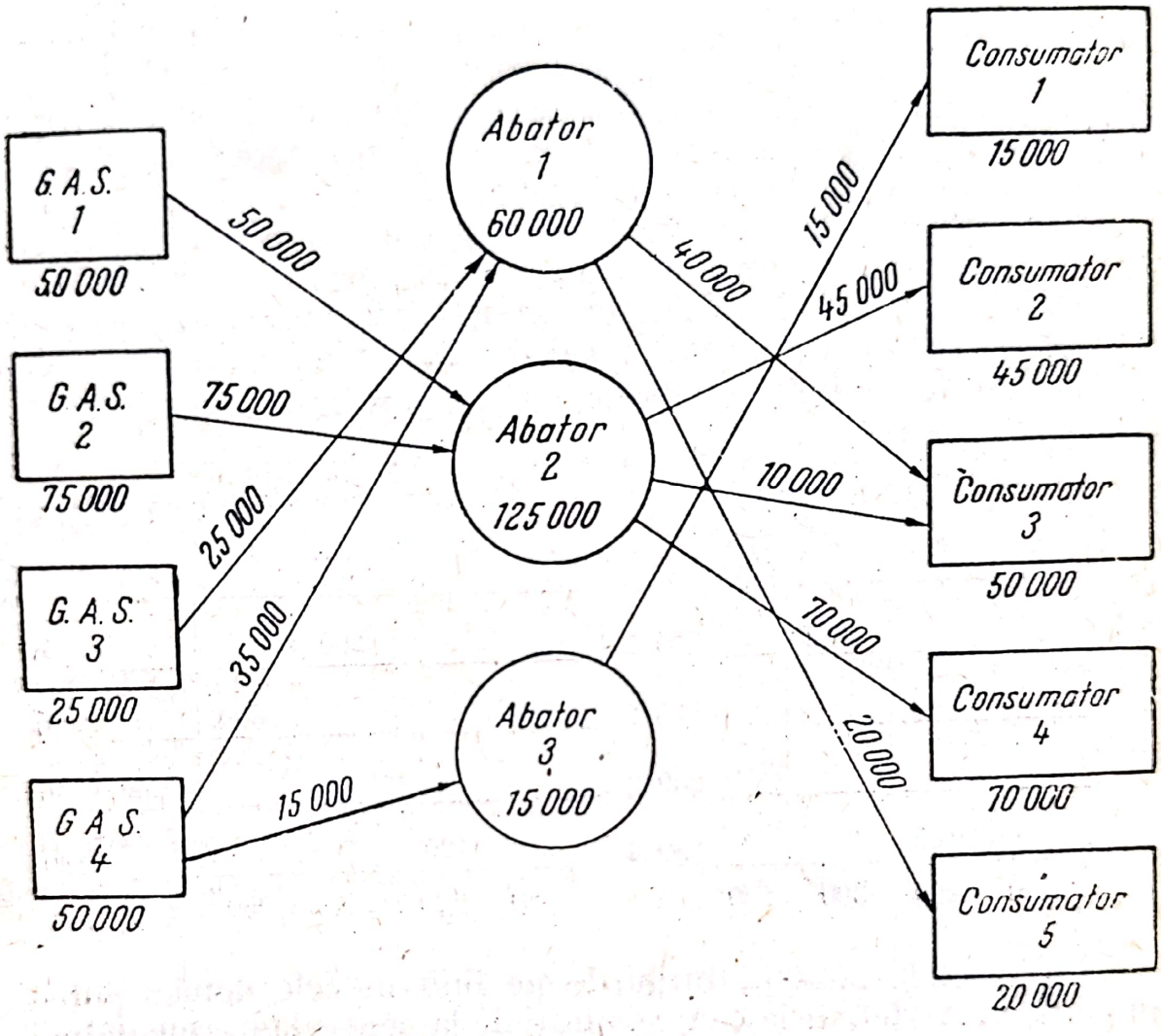
Situația poate fi prezentată cu ajutorul graficului 2.4.01.

Vom considera acum cazul în care capacitățile centrelor intermediare sînt limitate. Pentru exemplificare vom presupune că o anumită materie primă se află în 4 centre de exploatare, de unde este transportată la 4 centre de prelucrare. Pentru ușurință vom presupune că prin prelucrare greutatea materiei prime nu se modifică [1]. După prelucrare, produsul ob-

[1] În cazul în care prin prelucrare greutatea materiei prime se modifică, problema se rezolvă în mod asemănător, cu deosebirea că trebuie să se țină seama de coeficientul de transformare.

Scanned with OKEN Scanner

ținut se transportă la 5 centre de consum. Datele problemei sînt arătate în tabelul de mai jos , asemănător cu tabelul 2.4.01,



Graficul 2.4.01

cu singura deosebire că în coloana centrală se dau capacitățile centrelor intermediare.

Tabelul 2.4.04

	1	2	3	4		1	2	3	4	5
1	20	25	23	30	375	25	55	40	44	22
2	30	17	34	18	430	20	44	50	23	30
3	45	23	44	17	330	45	31	55	35	20
4	18	14	40	20	180	30	30	45	29	40
	150	200	300	250		80	120	200	350	150

Soluționarea problemei în acest caz se face în două etape :

— în prima etapă se soluționează independent două probleme de transport : prima problemă de la centrele inițiale la cele intermediare și a doua problemă de la centrele intermediare la centrele de consum. În cazul cînd în soluțiile optime ale celor două probleme, capacitățile utilizate la fiecare centru intermediar coincid, soluțiile obținute constituie soluția optimă a problemei combinate. În caz contrar se trece la a doua etapă ;

— în etapa a doua se caută cele mai convenabile modificări care să permită obținerea aceloraşi totaluri pe liniile orizontale în ambele soluții. Modul de determinare a celor mai convenabile modificări este asemănător cu cel dat în partea întîi cap., V.

Pentru exemplul considerat, soluțiile optime ale celor două probleme sînt :

Tabelul 2.4.05 a

	1	2	3	4	
1	75		300		375
2		95			95
3				250	250
4	75	105			180
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.05 b

	1	2	3	4	5	
1			200			200
2	80			350		430
3					150	150
4		120				120
	80	120	200	350	150	

În tabelele 2.4.05, totalurile pe linii în cele două soluții nu coincid. Astfel, de la centrele inițiale la centrul intermediar 1, conform soluției optime din stînga, sosesc 375 de unități, în timp ce de la acesta din urmă spre centrele finale, conform soluției optime din dreapta, pleacă 200 de unități ; la centrul intermediar 2 sosesc 95 de unități și pleacă 430 de unități ; la centrul intermediar 3, sosesc 250 de unități și pleacă 150 de unități, iar la centrul intermediar 4 sosesc 180 de unități și pleacă 120 de unități. Cele de mai sus fac ca soluțiile date de tabelele 2.4.05 să nu fie acceptabile. Ca și în cazul metodei diferențelor comparate, în soluția din stînga vom numi centrele intermediare 1, 3 și 4 — suprasolicitate în raport cu soluția din dreapta, iar centrul 2 — subsolicitat. În soluția din dreapta, vom numi centrele 1, 3 și 4 subsolicitate (în raport cu soluția din stînga), iar centrul 2 — suprasolicitat.

Din tabelul costurilor (2.4.04), se vede că în soluția din stînga modificarea cea mai convenabilă pentru descongestio-

Scanned with OKEN Scanner

narea centrelor suprasolicitate (1, 3 şi 4), pe seama centrului subsolicitat 2, este de a transfera o parte din cantitatea expeditorului 4 de la centrul 3 la centrul 2, cheltuielile unitare crescînd cu 18 — 17 = 1. În soluţia din dreapta, modificarea cea mai convenabilă pentru descongestionarea centrului intermediar 2 este cea obţinută prin transferarea unei părţi din cantitatea destinatarului 1 la centrul intermediar 1, costul unitar crescînd cu 25—20 = 5. Deci efectuarea modificării în soluţia din stînga este mai avantajoasă. Modificarea o vom face cu 100 unităţi, astfel încît cantitatea planificată să sosească în centrul 3 va rămîne 150, egală cu cantitatea planificată să plece din centrul intermediar 3 (soluţia din dreapta). Tabelul 2.4.05 devine :

Tabelul 2.4.06 a

	1	2	3	4	
1	75		300		375
2		95		100	195
3				150	150
4	75	105			180
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.06 b

	1	2	3	4	5	
1			200			200
2	80			350		430
3					150	150
4		120				120
	80	120	200	350	150	

Situaţia pe linii, în soluţiile din tabelele 2.4.06 *a* şi 2.4.06 *b* rămîne aceeaşi ca şi în soluţiile din tabelele 2.4.05*a* şi 2.4.05 *b*, cu excepţia centrului intermediar 3 care devine exact solicitat. Modificările cele mai avantajoase vor fi determinate ţinînd seama şi de aceasta. În soluţia din stînga a tabelelor 2.4.06, modificarea cea mai convenabilă este de a transfera o cantitate a expeditorului 2 de la centrul intermediar 4 la centrul intermediar 2, cheltuielile unitare crescînd cu 17—14=3.

În soluţia din partea dreaptă, modificarea cea mai convenabilă rămîne aceeaşi cu cea din cazul precedent. Rezultă că tot modificarea soluţiei din stînga este mai avantajoasă. Transferînd 60 de unităţi ale destinatarului 2 de la centrul intermediar 4 la centrul intermediar 2, obţinem tabelul 2.4.07 *a* şi *b*.

În soluţia din stînga (tabelele 2.4.07 *a* şi 2.4.07 *b*), centrul intermediar 1 este suprasolicitat, centrul intermediar 2 — subsolicitat, iar centrele 3 şi 4 — exact solicitate. În soluţia din dreapta, situaţia este inversă.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.4.07 a

	1	2	3	4	
1	75		300		375
2		155		100	255
3				150	150
4	75	45			120
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.07 b

	1	2	3	4	5	
1			200			200
2	80			350		430
3					150	150
4		120				120
	80	120	200	350	150	

În soluția din partea stîngă, modificarea cea mai avantajoasă este cea obținută prin transferarea unei părți din cantitatea livrată de expeditorul 1 de la centrul intermediar 1 la centrul intermediar 4. În acest caz, expeditorul 2 nu va mai livra această cantitate centrului intermediar 4, urmînd a o livra centrului intermediar 2. Costul unitar de transport crește cu $(18-20)+(17-14)=1$. În tabelul din dreapta, modificarea cea mai convenabilă rămîne aceeași ca în cazurile precedente. Modificarea din stînga, după cum se vede în tabelul 2.4.07 *a*, se poate face cu 45 de unități.

Avem:

Tabelul 2.4.08 a

	1	2	3	4	
1	30		300		330
2		200		100	300
3				150	150
4	120				120
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.08 b

	1	2	3	4	5	
1			200			200
2	80			350		430
3					150	150
4		120				120
	80	120	200	350	150	

Situația solicitărilor centrelor intermediare rămîne aceeași ca în cazul precedent. În soluția din stînga, modificarea cea mai convenabilă este obținută prin transferarea cantității expeditorului 1 centrului intermediar 2 în loc de 1, cheltuielile unitare crescînd cu $30-20=10$. În partea dreaptă, modificarea cea mai avantajoasă rămîne cea veche, corespunzătoare unei creșteri a costului unitar de 5. În afară de acestea mai există o modificare combinată, și anume dacă transferăm suplimentar

Scanned with OKEN Scanner

aceeaşi cantitate unui centru intermediar exact solicitat, atît în soluţia din stînga, cît şi în soluţia din dreapta. Se vede că o astfel de modificare, de asemenea mai avantajoasă decît cele de mai sus, se obţine prin transferarea în stînga a unei cantităţi a expeditorului 1 de la centrul intermediar 1 la 4, costul unitar crescînd cu $18-20=2$, iar în dreapta transferînd aceeaşi cantitate a expeditorului 4 de la centrul intermediar 2 la 4, costul unitar crescînd cu $29-23=6$. În total, costul unitar creşte cu $6-2=4$. După cum se vede, modificarea se poate face cu 30 de unităţi. Astfel :

Tabelul 2.4.09 a

	1	2	3	4	
1			300		300
2		200		100	300
3				150	150
4	150				150
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.09 b

	1	2	3	4	5	
1			200			200
2	80			320		400
3					150	150
4		120		30		150
	80	120	200	350	150	

În tabelele de mai sus, cea mai convenabilă modificare este cea din tabelul din dreapta, care corespunde unei creşteri a costului unitar cu 5. Efectuînd modificarea cu 80 de unităţi, obţinem :

Tabelul 2.4. 10 a

	1	2	3	4	
1			300		300
2		200		100	300
3				150	150
4	150				150
	150	200	300	250	

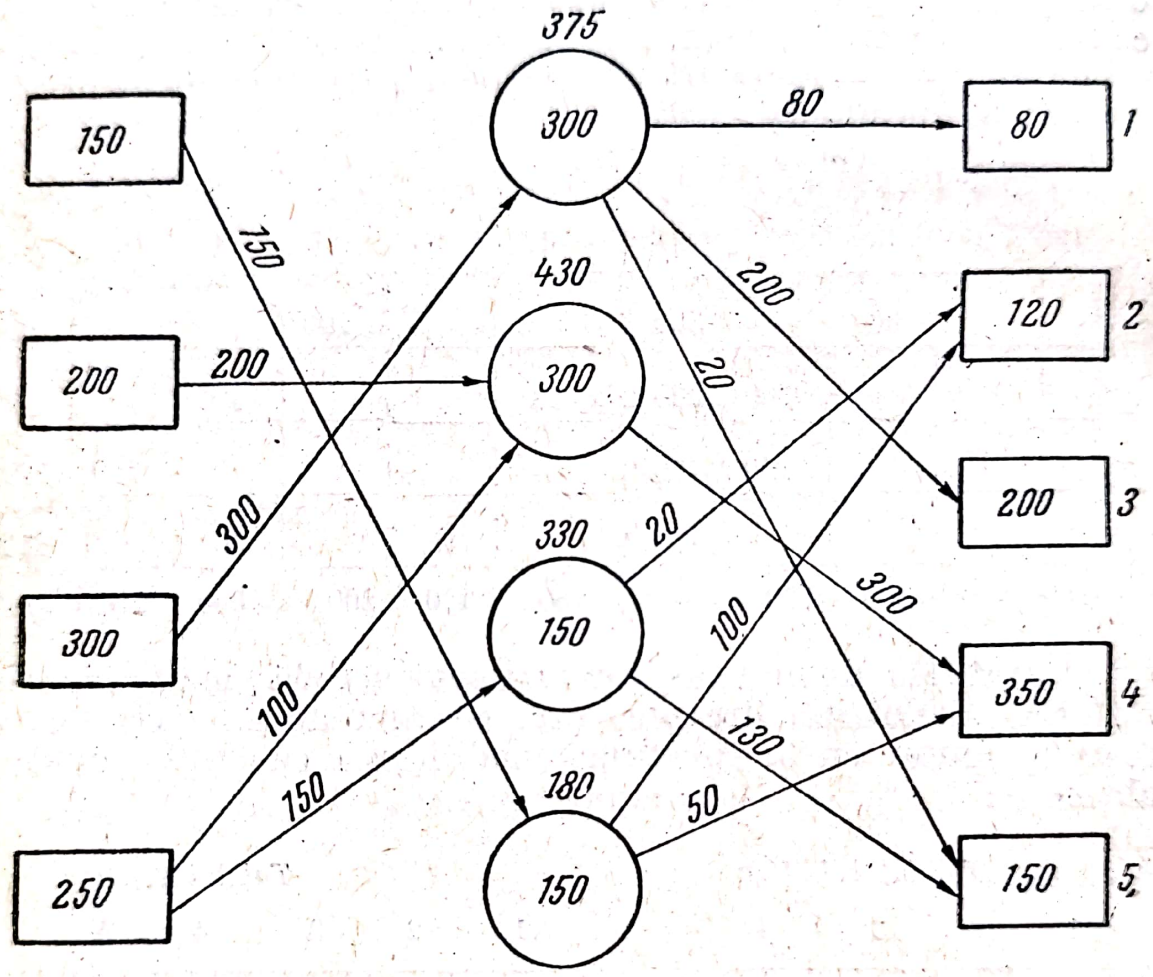
Tabelul 2.4.10 b

	1	2	3	4	5	
1	80		200			280
2				320		320
3					150	150
4		120		30		150
	80	120	200	350	150	

Centrele intermediare supra- şi subsolicitate rămîn aceleaşi. În tabelul din stînga, modificarea cea mai convenabilă este cea obţinută transferînd o cantitate a expeditorului 3 de la centrul intermediar 1 la 2, costul unitar crescînd cu $34-23=11$. În

Scanned with OKEN Scanner

tabelul din dreapta, modificarea cea mai convenabilă este de a transfera o cantitate a destinatarului 4 de la centrul intermediar 2 la centrul exact solicitat 4, costul unitar crescînd cu 29—23 = = 6, transferînd în acelaşi timp o cantitate egală destinatarului 2 de la centrul 4 la centrul 3, cu care ocazie costul unitar creşte cu 31—30 = 1, şi, în fine, transferînd de la acesta din urmă



Graficul 2.4.02

Tabelul 2.4.11 a

	1	2	3	4	
1			300		300
2		200		100	300
3				150	150
4	150				150
	150	200	300	250	

Tabelul 2.4.11 b

	1	2	3	4	5	
1	80		200		20	300
2				300		300
3		20			130	150
4		100		50		150
	80	120	200	350	150	

aceeaşi cantitate a destinatarului 3 la centrul intermediar 1, costul unitar crescînd cu $22-20=2$.

În total, conform acestei modificări, avem o creştere de $6+1+2=9$. Efectuînd această modificare (care este mai avantajoasă decît precedenta cu 20 de unităţi) se obţin tabelele 2.4.11 *a* şi *b*.

Soluţiile de mai sus constituie soluţia optimă a problemei combinate. Această soluţie, o putem reprezenta sub forma graficului 2.4.02. (Deasupra centrelor intermediare sînt trecute capacităţile maxime.)

După cum se vede, soluţia optimă, căreia îi corespund cheltuielile totale de transport de 42 360 lei, ne arată că nu este util să folosim nici un centru intermediar la capacitatea maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al V-lea

PROBLEMA GENERALĂ A PROGRAMĂRII LINIARE

În practica economică, în afara problemelor tratate pînă acum în lucrare, există o categorie importantă de probleme ce pot fi soluționate cu ajutorul metodelor programării liniare. În acest capitol vom da cîteva exemple de probleme de programare liniară, precum și o descriere sumară a unei metode de soluționare a lor.

Exemplul 1. Să considerăm o întreprindere industrială care poate fabrica 3 produse (1, 2 și 3), pentru care folosește 5 materii prime (A, B, C, D și E). Să presupunem că întreprinderea considerată n-are nominalizată în plan cantitatea pe care trebuie s-o producă din fiecare sortiment și că are disponibile capacități de producție. În acest caz, ea este interesată să producă sortimentele care-i aduc un beneficiu maxim.

Cantitățile disponibile de materii prime, precum și consumul lor pe unitate la cele 3 produse, sînt :

Tabelul 2.5.01

Materia primă	Cantitatea disponibilă (în unități convenționale)	Consumul pe unitate de produs		
		Produsul 1	Produsul 2	Produsul 3
A	1 250	2	3	5
B	1 530	5	1	0
C	500	3	7	0
D	750	4	3	1
E	900	6	2	2
Beneficiul pe unitate de produs		5	7	3

Problema cere să se determine cantitățile ce urmează să se fabrice din cele trei produse, astfel încît, ținînd seama de cantitățile de materii prime existente, să se obțină un beneficiu maxim. Notînd cu x_1, x_2 și x_3 cantitățile ce vor fi fabricate din cele trei produse, acestea trebuie astfel determinate, încît bene-

ficiul corespunzător, care va fi dat de formula (2.5.01), să fie maxim, adică :

$$5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = \text{maxim}. \tag{2.5.01}$$

Totodată, aceste necunoscute trebuie determinate în așa fel, încît să nu se depășească cantitățile disponibile din cele 5 materii prime. Pentru producerea cantităților x_1, x_2 și x_3 din materia primă A, se va consuma următoarea cantitate (vezi tabelul 2.5.01) : $2x_1 + 3x_2 + 5x_3$. Această cantitate trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu cantitatea disponibilă (1 250).

Scriind condițiile de nedepășire a materiilor prime existente, avem :

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 1\,250 & \text{(pentru materia primă} & \text{A)} \\ 5x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leqslant 1\,530 & (\ ,, \quad ,, \quad ,, & \text{B)} \\ 3x_1 + 7x_2 + 0x_3 \leqslant \ 500 & (\ ,, \quad ,, \quad ,, & \text{C)} \\ 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leqslant \ 750 & (\ ,, \quad ,, \quad ,, & \text{D)} \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant \ 900 & (\ ,, \quad ,, \quad ,, & \text{E)} \end{array}\right. \tag{2.5.02}$$

De asemenea, fiind vorba de cantități, trebuie ca ele să fie nenegative, adică :

$$x_1 \geqslant 0\,; \quad x_2 \geqslant 0\,; \quad x_3 \geqslant 0. \tag{2.5.03}$$

Relațiile (2.5.01) — (2.5.03) constituie modelul matematic al problemei de rezolvat.

Exemplul 2. La o gospodărie agricolă trebuie să se întocmească rații pentru furajarea unei anumite categorii de animale. Se cunoaște că rația zilnică trebuie să conțină cel puțin 190 g de albumină digestibilă, cel puțin 15 g de calciu și cel puțin 90 mg de caroten.

Gospodăria dispune de 5 feluri de nutrețuri, a căror compoziție și preț de cost sînt :

Tabelul 2.5.02

Nutrețul	Conținutul la kg			Preț de cost (lei/kg)
	Albumina digestibilă (g)	Calciu (g)	Caroten (mg)	
A	100	5,2	20	0,80
B	110	3,5	10	0,80
C	140	1,3	21	0,70
D	158	2,1	—	0,60
E	418	12,8	30	1,40

Scanned with OKEN Scanner

Simplificînd problema, vom presupune că gospodăria urmăreşte să determine raţia care să satisfacă cu cheltuieli minime necesarul animalelor la toţi indicatorii consideraţi.

Vom nota cu x_1, x_2, x_3, x_4 şi x_5 cantităţile ce vor fi introduse în raţie din cele 5 nutreţuri.

Preţul de cost total, care trebuie să fie minim, este dat de formula :

$$0{,}80\,x_1 + 0{,}80\,x_2 + 0{,}70\,x_3 + 0{,}60\,x_4 + 1{,}40\,x_5 = \text{minim.} \tag{2.5.04}$$

Condiţiile pe care trebuie să le satisfacă necunoscutele sînt :

$$\begin{cases} 100\,x_1 + 110\,x_2 + 140\,x_3 + 158\,x_4 + 418\,x_5 \geqslant 190 \\ \text{(referitoare la albumină digestibilă)} \\ 5{,}2\,x_1 + 3{,}5\,x_2 + 1{,}3\,x_3 + 2{,}1\,x_4 + 12{,}8\,x_5 \geqslant 15 \\ \text{(referitoare la cantitatea de calciu)} \\ 20\,x_1 + 10\,x_2 + 21\,x_3 + 0\,x_4 + 30\,x_5 \geqslant 90 \text{ (referitoare la caroten)} \end{cases} \tag{2.5.05}$$

$$x_1 \geqslant 0\,;\quad x_2 \geqslant 0\,;\quad x_3 \geqslant 0\,;\quad x_4 \geqslant 0\,;\quad x_5 \geqslant 0. \tag{2.5.06}$$

Exemplul 3. O gospodărie agricolă avînd o suprafaţă arabilă de 1 000 de unităţi şi dispunînd de 1 500 de unităţi de forţă de muncă şi de 900 de unităţi de mijloace de tracţiune, are posibilitatea de a cultiva trei culturi (A, B şi C) .

Cunoscînd necesarul de suprafaţă, forţă de muncă şi mijloace de tracţiune, precum şi preţul de vînzare pe unitate din fiecare dintre cele trei produse, se cere să se întocmească un plan care cu resursele date să aducă maximum de venit.

Datele problemei sînt :

Tabelul 2.5.03

Produsul	Necesarul pe unitatea de produs			Preţ de vînzare pe unitatea de produs
	Suprafaţă	Muncă	Tracţiune	
A	3	2	2	2
B	5	1	3	4
C	4	4	1	3

Notînd cu x_1, x_2 şi x_3 cantitatea de produse corespunzătoare celor 3 culturi, venitul din vînzarea acestora se va ridica la :

$$2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3. \tag{2.5.07}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cantităţile x_1, x_2 şi x_3 trebuie să fie astfel determinate, încît acest venit să fie maxim, cu respectarea următoarelor condiţii :

$$(2.5.08)\quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 1\,000 \text{ (condiţie pentru suprafaţă)} \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 1\,500 \text{ (,, ,, forţă de muncă)} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 900 \text{ (,, ,, mijloace de tracţiune)} \end{cases}$$

Se înţelege că cantităţile x_1, x_2 şi x_3 nu pot fi negative, adică :

$$(2.5.09)\qquad x_1 \geqslant 0\,;\ x_2 \geqslant 0\,;\ x_3 \geqslant 0.$$

Exemplul 4. O secţie a unei întreprinderi industriale posedă două grupe de utilaje (I şi II), cu care se pot fabrica trei feluri de piese (A, B şi C).

Cheltuielile de timp pe unitatea de produs pentru fiecare grupă de utilaje sînt :

Tabelul 2.5.04

Grupa de utilaje	Cheltuieli de timp pe unitate de produs (ore)			Fond de timp al utilajelor (maşini-ore)
	A	B	C	
I	0,3	0,4	0,5	200
II	0,4	0,5	0,4	220

Cantităţile de piese ce urmează să se fabrice (x_1, x_2 şi x_3) trebuie să fie astfel determinate, încît fondul de timp al utilajelor să fie folosit la maxim. Dacă notăm cu x_4 fondul de timp nefolosit la grupa I de utilaje şi cu x_5 fondul de timp nefolosit pentru a doua grupă de utilaje, avem :

$$(2.5.10)\quad \begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}5x_3 + x_4 = 200 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3 + x_5 = 220 \end{cases}$$

Ecuaţiile de mai sus ne arată că timpul folosit la fiecare grupă de utilaje pentru fabricarea celor trei piese, plus timpul nefolosit, este egal cu fondul de timp disponibil la aceste grupe de utilaje.

Problema cere să se determine x_1, x_2 şi x_3 astfel încît fondul de timp nefolosit la cele două grupe de utilaje să fie minim, adică :

$$(2.5.11)\qquad x_4 + x_5 = \text{minim}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Natural, necunoscutele noastre nu pot fi negative, adică :

$$(2.5.12) \qquad x_1 \geqslant 0\ ;\ x_2 \geqslant 0\ ;\ x_3 \geqslant 0\ ;\ x_4 \geqslant 0\ ;\ x_5 \geqslant 0.$$

Metode de soluționare. Să presupunem că pentru realizarea a două produse sau sortimente diferite o întreprindere folosește patru resurse economice. În cele ce urmează, noțiunea de resursă economică este folosită în sensul cel mai general. Ea cuprinde diferite materii prime sau materiale, diferite categorii de energie, forță de muncă, mijloace de producție etc.

Potrivit datelor tehnice ale procesului tehnologic, pentru realizarea unei unități din produsul 1 se consumă din cele patru resurse, respectiv, 2, 4, 1 și 0 unități, iar pentru producerea unei unități din produsul doi se consumă, respectiv, 2, 2, 0 și 4 unități din cele patru resurse.

Pe baza antecalculației se știe că o unitate din primul produs aduce un beneficiu de 2 lei, iar o unitate din produsul doi aduce un beneficiu de 3 lei. Știind că din resursa A sînt disponibile 12 unități (din punctul de vedere al programării liniare este indiferent ce unitate de măsură se folosește, aceasta putînd fi, de la caz la caz, m, mii m^2, kW etc.), din resursa B sînt disponibile 8 unități, din resursa C — 16 unități, iar din resursa D — 12 unități, se cere să se determine numărul de unități ce trebuie fabricate din cele două produse astfel încît să se obțină un beneficiu maxim. Desigur că s-a presupus că nu sînt date alte sarcini în ceea ce privește utilizarea acestor resurse.

Datele problemei pot fi reprezentate în următorul tabel :

Tabelul 2.5.05

Resurse	Produsul I	Produsul II	Capacitatea resurselor
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
Beneficiu pe unitatea de produs	2	3	

Pentru scrierea modelului matematic vom nota cu x_1 cantitatea ce urmează să fie produsă din sortimentul I și cu x_2 cantitatea ce urmează să fie produsă din sortimentul II.

Necunoscutele x_1 și x_2 determină planul de producție al întreprinderii. Aceste necunoscute trebuie astfel determinate,

încît beneficiul total, care este dat de funcția $2x_1 + 3x_2$, să fie maxim, adică :

$$B = 2x_1 + 3x_2 = \text{maxim.} \tag{2.5.13}$$

De asemenea, necunoscutele x_1 și x_2 trebuie alese astfel încît să nu se depășească nici una dintre resursele existente, adică trebuie să se respecte condițiile :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 12 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ 4x_1 + 0x_2 &\leqslant 16 \\ 0x_1 + 4x_2 &\leqslant 12 \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Variabilele x_1 și x_2 nu pot lua valori negative, deci :

$$x_1 \geqslant 0\,; \quad x_2 \geqslant 0. \tag{2.5.15}$$

Valorile x_1 și x_2, care să nu fie negative și să satisfacă cele 4 inegalități, pot fi determinate ușor cu ajutorul reprezentării grafice, astfel :

Ecuației $2x_1 + 2x_2 = 12$ într-un sistem de axe rectangulare îi corespunde o dreaptă care taie axa Ox_1 în punctul de diviziune $12 : 2 = 6$ și axa Ox_2 în punctul de diviziune $12 : 2 = 6$.

Dacă s-ar lua în considerare numai restricțiile în ceea ce privește resursa A, în planul de producție pot apărea numai valorile x_1 și x_2, care corespund unui punct din triunghiul haşurat din graficul (2.5.01).

Astfel, punctului P_1 îi corespund în graficul (2.5.01) $x_1 = 3$ și $x_2 = 2$, adică din primul produs trebuie să se producă 3 unități și din produsul doi 2 unități. Aceasta face ca din resursa A să se folosească :

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10 \text{ unități} < 12.$$

În general, pentru orice plan de producție corespunzător unui punct din interiorul triunghiului, va corespunde un consum din resursa A mai mic de 12 unități.

Planul de producție corespunzător punctului P_2 este :

$$x_1 = 1 \text{ și } x_2 = 5.$$

Consumul din resursa A corespunzător acestui plan este :

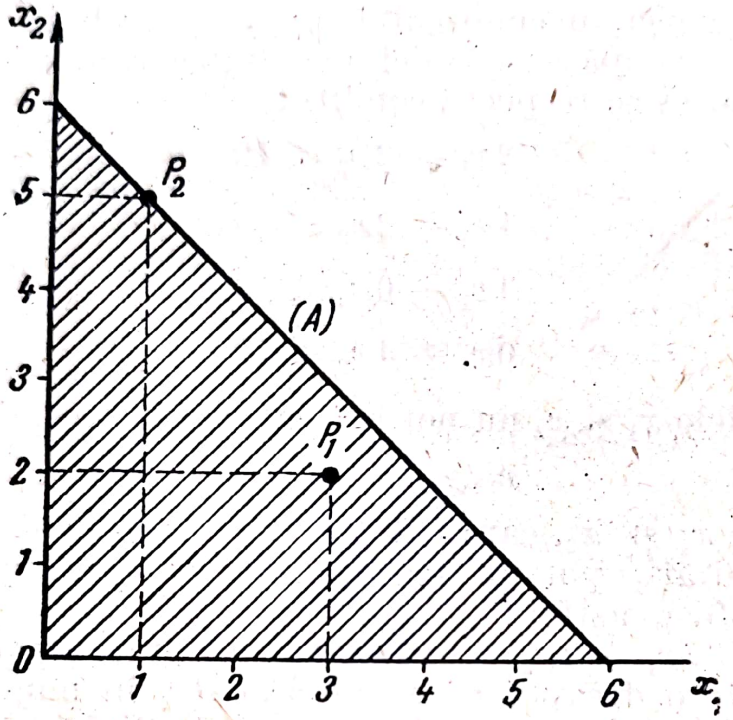
$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 12 \text{ unități.}$$

În general, orice plan de producție corespunzător unui punct situat pe dreapta (A) va duce la folosirea integrală a resursei A.

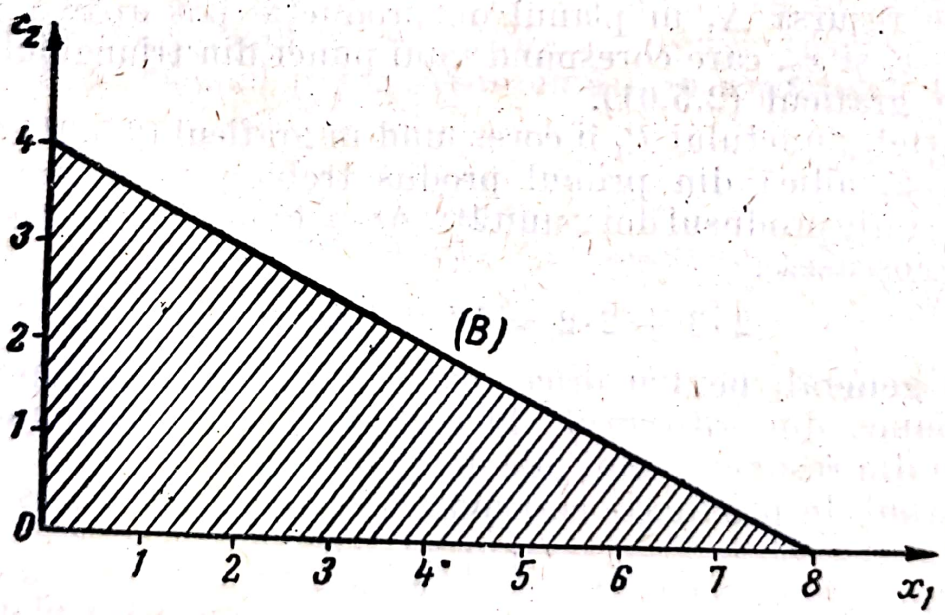
Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se stabilesc punctele corespunzătoare celorlalte resurse.

Ecuaţia $1x_1 + 2x_2 = 8$ corespunde dreptei care taie axa Ox_1 în punctul $8 : 1 = 8$ şi axa Ox_2 în punctul $8 : 2 = 4$. Dacă



Graficul 2.5.01

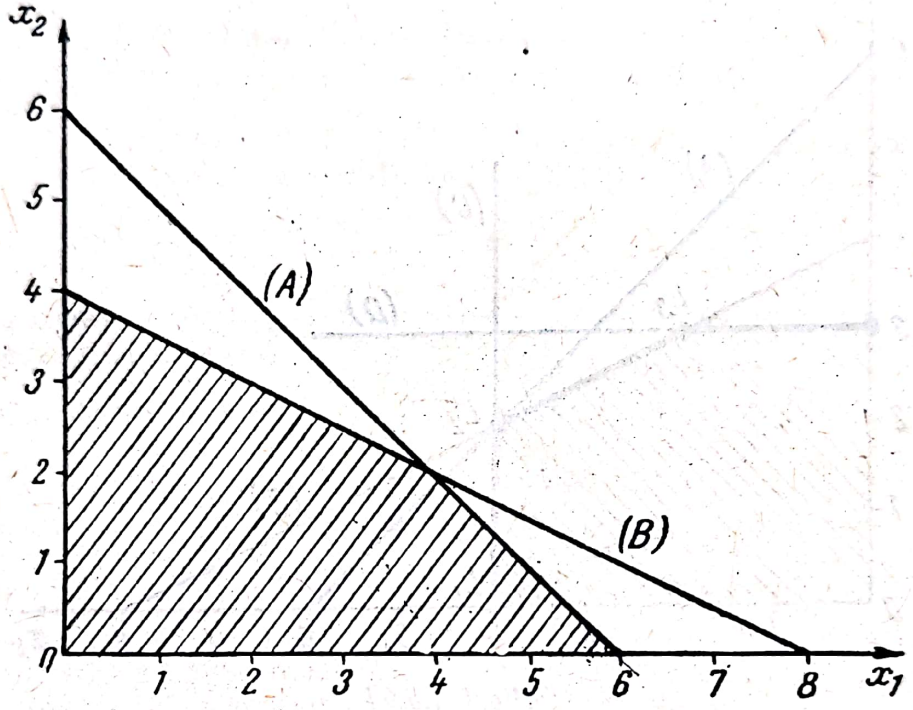


Graficul 2.5.02

se ia în considerare numai resursa B, în planul de producţie apar numai valorile x_1 şi x_2, care corespund unui punct din triunghiul haşurat în graficul (2.5.02).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se iau în considerare ambele resurse, în planul de producție apar numai valorile x_1 și x_2, care aparțin atît triunghiului din graficul (2.5.01), cît și triunghiului din graficul (2.5.02), adică punctele interioare porțiunii haşurate în graficul (2.5.03).



Graficul 2.5.03

În acelaşi mod se stabilesc şi punctele corespunzătoare celorlalte două resurse.

Considerînd resursa C, punctele corespunzătoare se găsesc între axa Ox_2 şi dreapta paralelă care taie axa Ox_1 în punctul de diviziune 4. Punctele care corespund resursei D se găsesc între Ox_1 şi dreapta paralelă care taie axa Ox_2 în punctul de diviziune 3.

Luînd în considerare toate resursele, programele posibile sînt cele corespunzătoare poligonului haşurat în graficul (2.5.04).

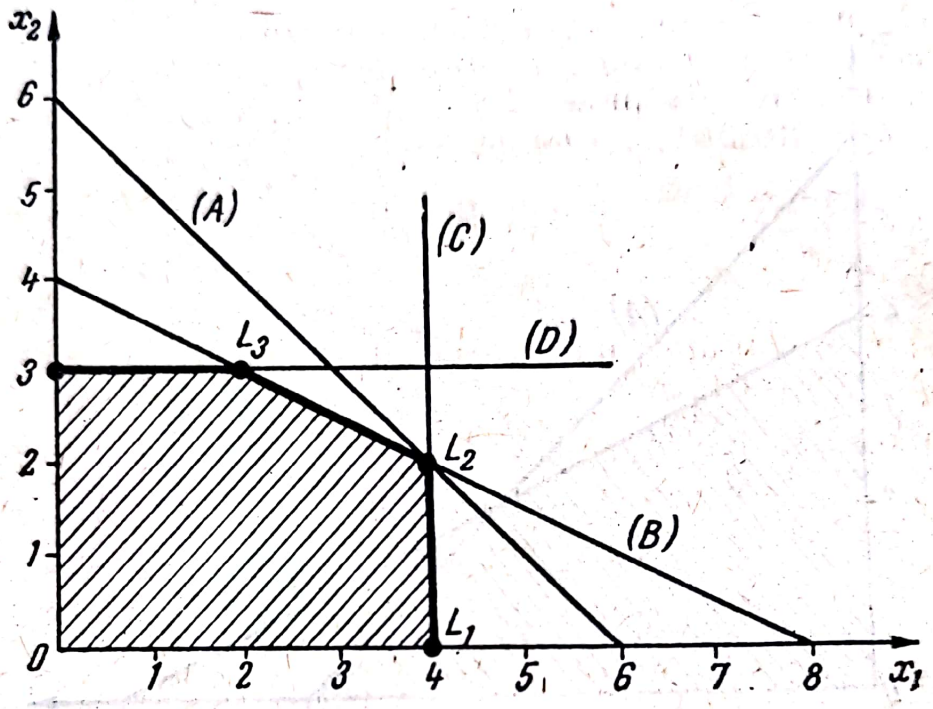
Dintre toate planurile posibile, adică dintre toate punctele poligonului din graficul (2.5.04), denumit *poligonul soluțiilor*, trebuie să alegem punctul (sau punctele) care corespunde beneficiului maxim. Este clar că punctele cărora le corespunde același beneficiu se găsesc pe aceeași dreaptă. Astfel, punctele corespunzătoare beneficiului 6 sînt situate pe dreapta :

$$2x_1 + 3x_2 = 6.$$

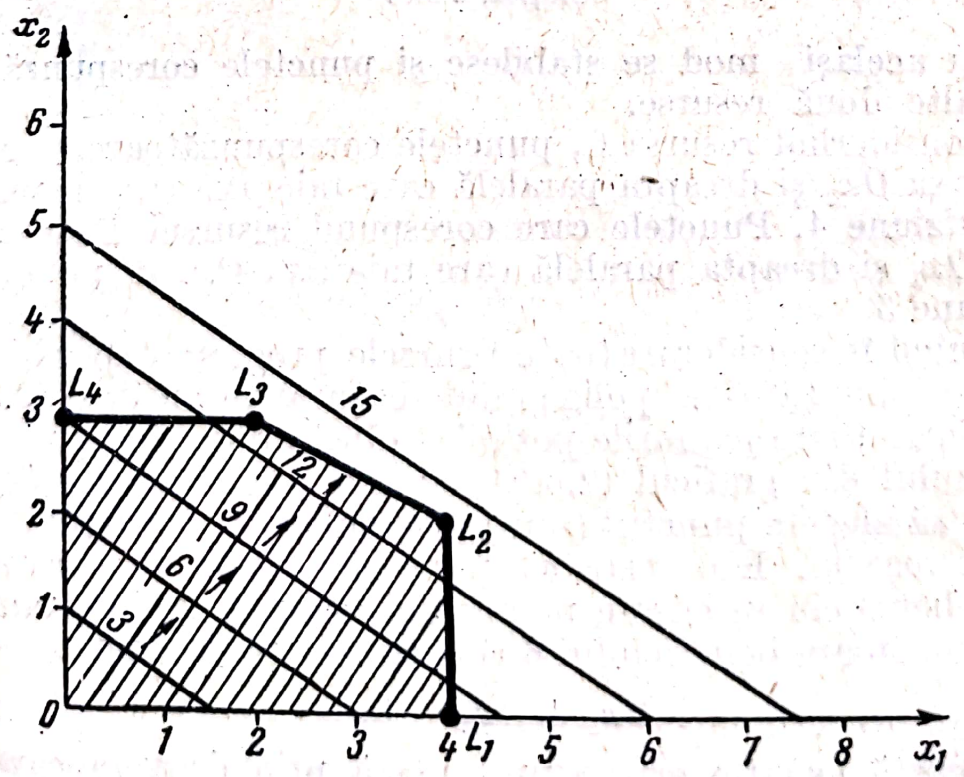
Această ecuație este reprezentată prin dreapta care taie axa Ox_1 în punctul $6 : 2 = 3$ și axa Ox_2 în punctul $6 : 3 = 2$.

Această dreaptă se numește *linia de nivel*, care corespunde beneficiului 6.

În graficul (2.5.05) sînt arătate liniile de nivel corespunzătoare beneficiilor 3, 6, 9, 12 și 15.



Graficul 2.5.04



Graficul 2.5.05

Scanned with OKEN Scanner

După cum se demonstrează cu ajutorul programării liniare, maximul se atinge într-unul din vîrfurile poligonului soluțiilor. Pe baza relației $B = 2x_1 + 3x_2$, se stabilește ușor că vîrfului O îi corespunde beneficiului 0, vîrfului L_1 îi corespunde beneficiul 8, vîrfului L_2 beneficiul 14, vîrfului L_3 beneficiul 13 și vîrfului L_4 beneficiul 9. Putem spune deci că punctul L_2 asigură beneficiul maxim și corespunde *programului optim*.

Prin urmare, din punctul de vedere al maximizării beneficiului, este optim să se producă :

$x_1 = 4$ unități din produsul I și

$x_2 = 2$ „ „ „ II.

Conform planului optim, din cele 4 resurse se utilizează următoarele cantități :

din resursa A $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12$;

„ „ B $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$;

„ „ C $4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 16$;

„ „ D $0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 8$.

După cum se vede, planul optim face ca resursele A, B și C să fie folosite în proporție de 100%, iar din resursa D să mai rămînă disponibile $12 - 8 = 4$ unități (33,3%).

Se poate constata ușor că orice plan care ar face ca și resursa D să fie folosită în proporție de 100% ar conduce la un beneficiu mai mic decît 14.

Desigur, în unele probleme practice se poate impune de la început ca anumite resurse (de pildă forța de muncă) să fie folosite în proporție de 100%. Aceasta ar face ca în modelul matematic să apară o ecuație suplimentară.

Metoda grafică, aplicată mai sus, poate fi folosită numai dacă există două necunoscute.

Pentru trei necunoscute, reprezentarea grafică ce se poate face în spațiul tridimensional devine mai greoaie, iar pentru mai multe necunoscute această reprezentare devine, în general, imposibilă cu excepția cazului cînd acestea sînt supuse numai la două restricții.

În problemele practice însă, modelul matematic în general conține un număr mare de necunoscute.

Pentru soluționarea acestora există o serie de metode, dintre care cea mai utilizată în prezent este *metoda simplex*.

În cele ce urmează ne vom limita numai la prezentarea în linii mari a algoritmului acestei metode, fără a intra în prezen-

tarea bazei matematice. Cititorul doritor să aprofundeze metodele programării liniare poate găsi amănunte în lucrările indicate în bibliografie.

Să presupunem că o întreprindere poate fabrica 6 produse. Pentru fabricarea acestora, întreprinderea utilizează 4 resurse.

Datele problemei sînt următoarele:

Tabelul 2.5.06

Resursa	Consumul pe unitatea de produs						Resursele existente
	Produsul 1	Produsul 2	Produsul 3	Produsul 4	Produsul 5	Produsul 6	
A	1	2	4	3	0	1	100
B	2	3	0	2	0	1	70
C	0	3	1	1	2	1	70
D	1	1	0	1	2	1	60
Beneficiul pe unitate	2	3	5	4	2	1	

Pentru scrierea modelului matematic, vom nota cu x_i (unde $i = 1, 2, 3, 4, 5$ şi 6) cantitatea ce va fi fabricată din cele 6 produse.

Necunoscutele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 şi x_6 trebuie determinate astfel încît beneficiul total:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 \tag{2.5.16}$$

să fie maxim.

Nedepăşirea resurselor existente se traduce matematic prin următoarele inegalităţi:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + \quad + x_6 &\leqslant 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad + 2x_4 + \quad + x_6 &\leqslant 70 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &\leqslant 70 \\ x_1 + x_2 + \quad + x_4 + 2x_5 + x_6 &\leqslant 60 \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

De asemenea, trebuie ca necunoscutele x_i să nu fie negative, adică:

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0;\ x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0;\ x_6 \geqslant 0. \tag{2.5.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda simplex se reduce, în principiu, la următoarele:
— se determină un plan inițial;
— se verifică dacă acesta este sau nu optim;
— dacă planul inițial nu este optim, este îmbunătățit succesiv pînă se ajunge la soluția optimă, de fiecare dată verificîndu-se optimalitatea lui.

Pentru determinarea unei soluții inițiale, inecuațiile modelului vor fi transformate în ecuații prin introducerea unor variabile suplimentare, denumite și *variabile-abateri.*

Avem:

$$
\begin{aligned}
&x_1+2x_2+4x_3+3x_4+ \quad +x_6+x_7 && =100\\
&2x_1+3x_2+ \quad +2x_4+ \quad +x_6+ \quad +x_8 && =\ 70\\
&\quad 3x_2+\ x_3+\ x_4+2x_5+x_6+ \quad +x_9 && =\ 70\\
&x_1+\ x_2+ \quad +\ x_4+2x_5+x_6+ \quad +x_{10} && =\ 60
\end{aligned}
\tag{2.5.19}
$$

După cum se vede, x_7, x_8, x_9 și x_{10} vor reprezenta, respectiv, cantitățile din resursele A, B, C, D rămase neutilizate. Rezultă că acestor variabile, în funcția de optimizat, nu le corespunde nici un beneficiu.

În literatura de specialitate se obișnuiește să se spună că acestea corespund unor „sortimente fictive".

În cazul nostru avem patru sortimente fictive, fiecare producîndu-se prin consumul unei unități dintre-o singură materie primă.

Un plan inițial poate fi obținut dînd următoarele valori necunoscutelor:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0;$$

$$x_7 = 100;\ x_8 = 70;\ x_9 = 70;\ x_{10} = 60.$$

Pentru a arăta modul de soluționare a problemei, este necesar a introduce următoarele definiții:

Definiția 1. Numim vector un sistem ordonat de numere $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a_i fiind numite componentele vectorului.

Faptul că sistemul este ordonat înseamnă că, schimbînd locul componentelor, vectorul se modifică. Astfel, de pildă, vectorul (2.5.4.7) nu este același cu vectorul (5.2.4.7).

Definiția 2. Vectorul $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este egal cu vectorul Q $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dacă

$$a_1 = b_1;\ a_2 = b_2;\ \ldots;\ a_n = b_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3. Suma a doi vectori este un vector avînd componentele egale cu suma componentelor celor doi vectori situate pe poziții corespunzătoare.

Exemplu:

$$(2, 5, 4, 1) + (2, 3, 0, 6) = (2 + 2, 5 + 3, 4 + 0, 1 + 6) = \\ = (4, 8, 4, 7).$$

În mod analog se definește suma unui număr oarecare de vectori.

Definiția 4. Produsul unui vector cu un număr este un vector avînd fiecare componentă multiplicată cu numărul respectiv.

Exemplu:

$$P = (2, 3, 5, 9, 6)$$

$$7 \cdot P = 7 \cdot (2, 3, 5, 9, 6) = (14, 21, 35, 63, 42).$$

Definiția 5. Vectorul Q se zice că este combinație liniară de vectorii $P_1, P_2, \ldots, P_k$ dacă există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, astfel încît:

$$Q = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \ldots + \lambda_k P_k.$$

Exemplu:

Dacă:

$$Q = (4, 5, 3),$$

$$P_1 = (1,0,0),$$

$$P_2 = (0, 1, 0),$$

$$P_3 = (0, 0, 1),$$

atunci

$$Q = 4P_1 + 5P_2 + 3P_3,$$

adică:

$$(4, 5, 3) = 4\ (1, 0, 0) + 5\ (0, 1, 0) + 3\ (0, 0, 1).$$

Definiția 6. Vectorii $P_1, P_2, \ldots, P_n$ formează un sistem liniar dependent dacă există un sistem de numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \ldots + \lambda_n P_n = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde 0 este vectorul nul, adică vectorul avînd toate componentele nule.

$$\{0 = (0, 0, \ldots, 0)\}.$$

Definiția 7. Un sistem de vectori este liniar independent dacă el nu este liniar dependent.

Cunoscînd aceste noțiuni, vom considera coeficienții din sistemul de ecuații (2.5.17) ca fiind componentele următorilor vectori:

$P_1=(1,2,0,1)$; $P_2=(2,3,3,1)$; $P_3=(4,0,1,0)$; $P_4=(3,2,1,1)$;

$P_5=(0,0,2,2)$; $P_6=(1,1,1,1)$; $P_7=(1,0,0,0)$;

$P_8=(0,1,0,0)$; $P_9=(0,0,1,0)$; $P_{10}=(0,0,0,1)$.

După cum se vede, $P_1, P_2, \ldots, P_6$ sînt tocmai coeficienții consumului pe unitatea de produs din tabelul 2.5.06. Acești vectori pot fi scriși sub formă de combinații liniare ale vectorilor P_7, P_8, P_9 și P_{10}.

Deci:

$$(2.5.20)\qquad \begin{cases} P_1 = 1P_7 + 2P_8 + 0P_9 + 1P_{10} \\ P_2 = 2P_7 + 3P_8 + 3P_9 + 1P_{10} \\ P_3 = 4P_7 + 0P_8 + 1P_9 + 0P_{10} \\ P_4 = 3P_7 + 2P_8 + 1P_9 + 1P_{10} \\ P_5 = 0P_7 + 0P_8 + 2P_9 + 2P_{10} \\ P_6 = 1P_7 + 1P_8 + 1P_9 + 1P_{10} \end{cases}$$

Deoarece toți ceilalți vectori au putut fi exprimați în funcție de vectorii P_7, P_8, P_9 și P_{10}, (care sînt liniar independenți) se spune că aceștia formează *o bază a sistemului de vectori.*

Din punct de vedere economic, relațiile de mai sus se interpretează astfel:

— din prima relație se observă că pentru producerea unei unități din sortimentul 1 se consumă aceeași cantitate de materii prime A, B, C și D ca și pentru producerea unei unități din sortimentul 7, a două unități din sortimentul 8 și a unei unități din sortimentul 10;

— relația a doua arată că pentru producerea unei unități din sortimentul 2 se consumă aceeași materie primă ca și pentru 2 unități din sortimentul 7, 3 unități din sortimentul 8, 3 unități din sortimentul 9 și o unitate din sortimentul 10.

Scanned with OKEN Scanner

În același mod se interpretează și celelalte 4 relații.

Legat de baza de vectori, se întocmește următorul tabel, denumit *tabel simplex*.

Tabelul 2.5.07

Vectorii din bază	Beneficiu	P_0	2	3	5	4	2	1	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
P_7	0	100	1	2	0	4	0	1	1	0	0	0
P_8	0	70	2	3	0	2	0	1	0	1	0	0
P_9	0	70	0	3	1	1	2	1	0	0	1	0
P_{10}	0	60	1	1	0	1	2	1	0	0	0	1
			2	3	5	4	2	1	0	0	0	0

În tabelul de mai sus, în coloana a doua, se trec beneficiile corespunzătoare vectorilor din bază. În coloana a treia sînt trecute datele planului inițial. Celelalte 10 coloane arată modul cum se exprimă vectorii în funcție de vectorii bazei (vezi formulele 2.5.20), precum și beneficiul corespunzător producerii unei unități din aceste sortimente (datele sînt trecute în prima linie). În ultima linie a tabelului simplex se arată cu cît se ridică beneficiul întreprinderii dacă se produce o unitate din produsul scris în coloana respectivă.

Un plan oarecare nu este optim dacă în ultima linie apar numere pozitive, care arată că beneficiul întreprinderii poate fi mărit.

În tabelul 2.5.07, toate numerele din ultima linie corespunzătoare sortimentelor reale (1—6) sînt pozitive, ceea ce înseamnă că planul poate fi îmbunătățit.

Oricare dintre cele 6 produse poate fi luat în considerare, toate ducînd la mărirea beneficiului.

Ne vom opri asupra sortimentului 3, care aduce pe unitatea de produs beneficiul cel mai mare (5). Deci am stabilit ca sortimentul 3 să fie produs, ceea ce înseamnă că vom introduce în bază vectorul P_3. Trebuie să stabilim deci în locul cărui vector îl vom introduce.

Pentru aceasta trebuie stabilită cantitatea maximă din sortimentul 3 care poate fi produsă cu ajutorul resurselor existente.

Pentru producerea unei unități din sortimentul 3 se consumă 4 unități din resursa A și o unitate din resursa C. Ținînd seama că sînt disponibile numai 100 de unități din resursa A și 70 de unități din resursa C, pentru a determina cantitatea

Scanned with OKEN Scanner

maximă din sortimentul 3 ce poate fi produsă vom face rapoartele $\frac{100}{4} = 25$, $\frac{70}{1} = 70$ și vom alege valoarea cea mai mică.

Rezultă, așadar, că din sortimentul 3 se vor produce 25 de unități, ceea ce va duce la consumarea integrală a resursei A. De aici reiese că sortimentul fictiv 7 (care indică în fond cantitatea din resursa A rămasă disponibilă) nu se va mai produce, deci vectorul P_7 iese din bază.

Determinarea vectorului care trebuie să iasă din bază, cunoscînd vectorul care trebuie să intre în bază, se poate face ușor cu ajutorul tabelului simplex, și anume împărțind numerele din coloana P_0 la componentele corespunzătoare vectorului ce trebuie introdus în bază și considerînd numai componentele strict pozitive. Se va exclude din bază vectorul care corespunde celui mai mic cît.

Numărul de la intersecția liniei vectorului ce iese din bază cu coloana vectorului ce intră în bază va fi numit *element-pivot*. Linia pivotului va fi numită *linia principală*, iar coloana pivotului va fi numită *coloana principală*.

În cazul tabelului 2.5.07, elementul-pivot este cel de la intersecția liniei P_7 cu coloana P_3, care este 4 (numărul este scris cu cifre îngroșate).

După determinarea pivotului se întocmește noul tabel simplex, astfel:

Toate elementele liniei principale se împart la elementul — pivot. Coloana principală va avea toate elementele egale cu zero, în afara celui corespunzător pivotului, care devine 1. Toate celelalte elemente ale tabelului simplex, cu excepția coloanei a doua, în care sînt trecute beneficiile, se calculează după următoarea formulă:

$$\text{noul element} = \text{vechiul element} - \frac{\text{elementul situat la intersecția cu linia principală} \times \text{elementul situat la intersecția cu coloana principală}}{\text{elementul-pivot}}$$

Ca rezultat se obține tabelul 2.5.08.

Deci, planul îmbunătățit este:

$$x_3 = 25; \quad x_8 = 70; \quad x_9 = 45; \quad x_{10} = 60;$$

celelalte necunoscute sînt egale cu zero.

Adică se vor produce 25 de unități din sortimentul 3, rămînînd nefolosite 70 de unități din resursa B, 45 din resursa C și 60 din resursa D.

Tabelul 2.5.08

Baza	Beneficii	P_0	2	3	5	4
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	5	$\frac{100}{4} = 25$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
P_8	0	$70 - \frac{0 \cdot 100}{4} = 70$	$2 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 2$	$3 - \frac{0 \cdot 2}{4} = 3$	0	$2 - \frac{0 \cdot 3}{4} = 2$
P_9	0	$70 - \frac{1 \cdot 100}{4} = 45$	$0 - \frac{1 \cdot 1}{4} = -\frac{1}{4}$	$3 - \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2}$	0	$1 - \frac{1 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}$
P_{10}	0	$60 - \frac{0 \cdot 100}{4} = 60$	$1 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 1$	$1 - \frac{0 \cdot 2}{4} = 1$	0	$1 - \frac{0 \cdot 3}{4} = 1$
		125	$2 - \frac{5\ 1}{4} = \frac{3}{4}$	$3 - \frac{5 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}$	0	$4 - \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}$

Tabelul 2.5.08 (continuare)

2	1	0	0	0	0
P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$0 - \frac{0 \cdot 0}{4} = 0$	$1 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 1$	$0 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$	$1 - \frac{0 \cdot 0}{4} = 1$	$0 - \frac{1 \cdot 0}{4} = 0$	$0 - \frac{0\ 0}{4} = 0$
$2 - \frac{1\ 0}{4} = 2$	$1 - \frac{1 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$	$0 - \frac{1\ 1}{4} = -\frac{1}{4}$	$0 - \frac{1 \cdot 0}{4} = 0$	$1 - \frac{1 \cdot 0}{4} = 1$	$0 - \frac{1 \cdot 0}{4} = 0$
$0 - \frac{0 \cdot 0}{0} = 0$	$1 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 1$	$0 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$	$0 - \frac{0\ 0}{4} = 0$	$0 - \frac{0\ 0}{4} = 0$	$1 - \frac{0\ 0}{4} = 1$
$2 - \frac{5 \cdot 0}{4} = 2$	$1 - \frac{5\ 1}{4} = -\frac{1}{4}$	$0 - \frac{5 \cdot 1}{4} = -\frac{5}{4}$	$0 - \frac{5 \cdot 0}{4} = 0$	$0 - \frac{5 \cdot 0}{4} = 0$	$0 - \frac{5 \cdot 0}{0} = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Beneficiul corespunzător va fi :

$$5 \cdot 25 + 0 \cdot 70 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 60 = 125.$$

Tabelul simplex 2.5.08 se interpretează la fel ca tabelul 2.5.07. Astfel, pe baza acestui tabel ştim cum se exprimă toţi vectorii în funcţie de vectorii bazei. De pildă :

$$P_1 = \frac{1}{4} P_3 + 2P_8 - \frac{1}{4} P_9 + 1P_{10},$$

ceea ce înseamnă că pentru obţinerea unei unităţi din sortimentul 1 se utilizează din fiecare resursă aceeaşi cantitate ca pentru $\frac{1}{4}$ unităţi din sortimentul 3, plus 2 unităţi din sortimentul 8, o unitate din sortimentul 10, din care trebuie scăzută cantitatea folosită pentru $\frac{1}{4}$ unităţi din sortimentul 9.

Aceeaşi interpretare se dă şi celorlalte relaţii. Numerele din ultima linie, ca şi în cazul precedent, arată cu cît se poate mări beneficiul dacă se produce o unitate din sortimentul respectiv. Astfel $\frac{3}{4}$ din dreptul coloanei P_1 arată că prin producerea unei unităţi din sortimentul 1 beneficiul întreprinderii se măreşte cu $\frac{3}{4}$.

Acest lucru se poate vedea şi astfel :

O unitate din sortimentul 1 aduce un beneficiu egal cu 2. Ştiind că pentru producerea unei unităţi din sortimentul 1 se folosesc aceleaşi cantităţi din cele 4 resurse ca pentru $\frac{1}{4}$ unităţi din sortimentul 3, care aduce un beneficiu de $\frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}$, plus 2 unităţi din sortimentul 8, care aduce un beneficiu de $2 \cdot 0 = 0$, minus $\frac{1}{4}$ unităţi din sortimentul 9, care aduce un beneficiu de $\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$, şi plus o unitate din sortimentul 10, care aduce un beneficiu de $1 \cdot 0 = 0$, rezultă că în cazul producerii unei unităţi din sortimentul 1 beneficiul creşte cu :

$$2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 5 + 2 \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 + 1 \cdot 0\right) = \frac{3}{4}.$$

În mod analog se interpretează şi celelalte numere din ultima linie a tabelului 2.5.08.

Scanned with OKEN Scanner

Baza	Bene-ficiu	P_0	2	3	5	4
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	5	$25 - \frac{45 \cdot 0}{2} = 25$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
P_8	0	$70 - \frac{45 \cdot 0}{2} = 70$	2	3	0	2
P_5	2	$\frac{45}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
P_{10}	0	$60 - \frac{45 \cdot 0}{2} = 60$	1	1	0	1
			$\frac{3}{4} - \frac{-\frac{1}{4} \cdot 2}{2} = 1$	$\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{2} \cdot 2}{2} = -2$	0	$\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4} \cdot 2}{2} = 0$

[1] Deoarece în tabelul 2.5.08, pe coloana pivotului, în liniile lui P_3, P_8 și

Deoarece în ultima linie apar în continuare numere pozitive, rezultă că planul nu este optim, putînd fi îmbunătățit.

Numerele negative care apar în dreptul vectorilor P_6 și P_7 arată că, în cazul introducerii acestor vectori în bază, beneficiul total se diminuează.

Pentru îmbunătățirea soluției vom introduce în bază vectorul care duce la cea mai mare creștere a beneficiului (vezi ultima linie a tabelului 2.7.08). Acesta este P_5, care duce la mărirea beneficiului cu 2 pentru fiecare unitate produsă din sortimentul 5.

Bază	Bene-ficiu	P_0	2	3	5	4
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	5	$25 - \frac{70 \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{65}{4}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4} \cdot 3}{2} = \frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$
P_1	2	35	1	$\frac{3}{2}$	0	1
P_5	2	$\frac{45}{2} - \frac{70 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}{2} = \frac{215}{8}$	0	$\frac{5}{4} - \frac{-\frac{1}{8} \cdot 3}{2} = \frac{23}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
P_{10}	0	$60 - \frac{70 \cdot 1}{2} = 25$	0	$1 - \frac{1 \cdot 3}{2} = -\frac{1}{2}$	0	0
			0	$-2 - \frac{3 \cdot 1}{2} = -\frac{7}{4}$	0	$0 - \frac{2 \cdot 1}{2} = -1$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.5.09

2	1	0	0	0	0
P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	0	0	1
0	$-\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{4}\cdot 2}{2}=-1$	$-\frac{5}{4}-\frac{-\frac{1}{4}\cdot 2}{2}=-1$	0	$0-\frac{2\cdot 1}{2}=-1$	0

P_{10} apare numărul zero, elementele acestor linii în noul tabel rămîn neschimbate.

Pentru determinarea vectorului ce va fi scos din bază, trebuie să se facă rapoartele dintre componentele lui P_0 și componentele pozitive ale lui P_5, urmînd să se aleagă cel mai mic raport. Cum însă P_5 are o singură componentă strict pozitivă (2), urmează că P_5 va fi introdus în bază în locul vectorului P_9.

Elementul-pivot fiind 2, conform regulilor date din tabelul simplex 2.5.08 se obține tabelul 2.5.09.

Deci noul plan va fi:

$$x_3 = 25\,;\ x_5 = \frac{45}{2}\,;\ x_8 = 70\,;\ x_{10} = 60.$$

Tabelul 2.5.10

2	1	0	0	0	0
P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	0
0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
0	$-1-\frac{1\cdot 1}{2}=-\frac{3}{2}$	$-1-\frac{1\cdot 0}{2}=-1$	$0-\frac{1\cdot 1}{2}=-\frac{1}{2}$	$-1-\frac{1\cdot 0}{2}=-1$	0

Scanned with OKEN Scanner

Acesta asigură un beneficiu de :

$$5 \cdot 25 + 2 \cdot \frac{45}{2} = 170.$$

Nici planul de mai sus nu este optim, deoarece în ultima linie a tabelului simplex apare un număr pozitiv în dreptul vectorului P_1. Rezultă deci că va trebui introdus în bază acest vector. Pentru a vedea în locul cărui vector trebuie introdus, trebuie să calculăm rapoartele :

$$\frac{25}{\frac{1}{4}} = 100 \; ; \; \frac{70}{2} = 35 \; ; \; \frac{60}{1} = 60.$$

Raportul cel mai mic fiind $\frac{70}{2}$, vectorul P_8 va fi exclus din bază.

Noul tabel simplex va fi tabelul 2.5.10.

Noul plan este deci :

$$x_1 = 35 \; ; \; x_3 = \frac{65}{4} = 16{,}25 \; ; \; x_5 = \frac{215}{8} = 26{,}875 \; ; \; x_{10} = 25.$$

În tabelul 2.5.10, nici unul dintre numerele din ultima linie nu este pozitiv, deci planul dat nu mai poate fi îmbunătățit. Rezultă că planul găsit este optim și asigură un beneficiu de :

$$2 \cdot 35 + 5 \cdot 16{,}25 + 2 \cdot 26{,}875 = 205 \; lei,$$

care este beneficiul maxim pe care-l poate obține întreprinderea în condițiile date.

Deci, pentru a obține beneficiul maxim, întreprinderea trebuie să producă 35 de unități din sortimentul 1, 16,25 de unități din sortimentul 3, 26,875 de unități din sortimentul 5 și rămîn neutilizate 25 de unități din resursa D.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al VI-lea

UNELE ASPECTE PRIVIND APLICAREA ÎN PRACTICĂ A PROBLEMEI DE TRANSPORT

Dintre problemele programării liniare, problema de transport este cea mai răspîndită. Aceasta se datorește, în primul rînd, faptului că punerea ei din punct de vedere economic și soluționarea ei matematică este mai simplă decît în cazul altor probleme. În al doilea rînd, folosirea largă a problemei de transport se explică și prin rezultatele bune obținute prin aplicarea ei în practică.

Și în țara noastră atît cercetările teoretice cît și aplicațiile practice legate de problema transporturilor au făcut obiectul unor preocupări intense.

Începînd din noiembrie 1959, sub conducerea științifică a Acad. Gr. C. Moisil funcționează un colectiv care și-a început activitatea prin folosirea metodelor cunoscute de programare liniară, în vederea elaborării planurilor optime de transporturi pentru traversele de cale ferată. Aceste planuri optime au fost puse în aplicare de către Ministerul Economiei Forestiere, începînd din anul 1960.

Mai tîrziu, au fost rezolvate unele probleme teoretice puse de practica planificării transporturilor. Astfel, s-a elaborat o metodă cu ajutorul căreia planurile optime pentru o anumită perioadă pot fi obținute pe baza planurilor optime pentru oricare altă perioadă, ținîndu-se seama de schimbările intervenite în cantitățile produse sau consumate (vezi bibliografia [3]).

Ulterior, s-a găsit o metodă cu ajutorul căreia trecerea directă de la planul de transporturi optim valabil pentru o anumită perioadă la cel valabil pentru o altă perioadă devine posibilă și în cazul cînd apar noi centre de producție sau de consum (vezi bibliografia [4]).

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrşit, s-a găsit o metodă nouă pentru rezolvarea problemei obişnuite de transport bazată pe rezultatele celor două lucrări menţionate anterior (vezi bibliografia [6]).

Dintre problemele studiate fac parte şi acelea pe care le ridică planificarea transportului produselor care se exportă. Astfel s-a găsit o metodă pentru optimizarea planurilor de transporturi ale unor produse care pot fi exportate prin mai multe puncte de frontieră, cantităţile care urmează să fie exportate fiind specificate pe ţări.

O altă metodă rezolvă cazurile cînd numai o parte din producţia fiecărui centru este exportabilă. Această din urmă metodă se aplică şi în planificarea transportului produselor neomogene în general, neomogenitatea constînd aici în existenţa unor limite pentru anumite centre consumatoare în ceea ce priveşte posibilitatea de a consuma producţia anumitor centre producătoare.

O altă preocupare a constat în aplicarea algebrelor booleene la problema transporturilor. Astfel s-a adus o completare la metoda Egervary, care permite aplicarea ei nemijlocită.

În legătură cu problema generalizată a transporturilor, care are numeroase aplicaţii industriale în afara domeniului propriu-zis al transporturilor, s-a realizat o extindere a metodei ciclurilor, care simplifică rezolvarea acestui tip de problemă.

O altă preocupare a constituit-o găsirea unor procedee speciale de rezolvare a unor probleme de dimensiuni foarte mari. În această privinţă s-a găsit o metodă prin care rezolvarea unei probleme „mari" se poate reduce la rezolvarea repetată a două probleme de dimensiuni mai mici.

Lucrările practice din domeniul transporturilor au început, după cum s-a arătat, prin elaborarea unor planuri optime lunare de transport al traverselor de cale ferată. Curînd după aceasta s-a trecut la elaborarea unor planuri trimestriale de repartiţie a lemnelor de foc.

Lemnele de foc se transportă de la circa 220 expeditori la circa 250 destinatari. Prin gruparea producătorilor, respectiv a consumatorilor, şi prin diferite alte transformări, s-a ajuns la o problemă cu 40 expeditori şi 48 destinatari. Această problemă se rezolvă trimestrial începînd din 1962, calculele efectuîndu-se la maşina electronică C.I.F.A. 101, rezultatele aplicîndu-se de către Ministerul Economiei Forestiere. Economiile care se realizează de pe urma programării matematice a repartiţiei lemnelor de foc se cifrează la aproximativ 14 milioane t/km sau 1,2 milioane lei anual (pe baza tarifelor în vigoare).

Scanned with OKEN Scanner

Începînd din 1963, programarea matematică s-a extins şi la repartiţia lemnului de celuloză. Lemnul de celuloză este un produs neomogen cu două sortimente, care se transportă de la peste 100 producători la 8 consumatori. Şi pentru acest produs se elaborează cu regularitate planuri trimestriale de repartiţie prin programare matematică, care se aplică de către Ministerul Economiei Forestiere, economiile anuale ridicîndu-se la aproximativ 10 milioane t/km, respectiv circa 600 mii lei anual (pe baza tarifelor în vigoare).

În aceste lucrări practice s-au utilizat rezultatele teoretice obţinute de colectivul sus-menţionat.

Un alt colectiv de economie matematică a fost alcătuit în anul 1960, în cadrul Direcţiei de studii şi documentare din Ministerul Finanţelor.

Una dintre primele probleme practice soluţionate de acest colectiv s-a referit la transportul lemnelor de foc în regiunea Bucureşti.

Calculul s-a făcut pentru trimestrul I/1961, numărul consumatorilor (localităţile care solicită lemne de foc) fiind 23, iar numărul furnizorilor (exploatările forestiere) — 15. Planul optim, determinat cu ajutorul metodelor matematice, a indicat posibilitatea obţinerii unei economii de peste 100 000 lei pe trimestru, faţă de planul întocmit fără ajutorul metodelor matematice. Această economie provine din reducerea volumului de transport, exprimat în tone-kilometri, cu peste 8%.

În scopul experimentării aplicării metodelor matematice şi în alte sectoare, grupul de cercetări economico-matematice din Ministerul Finanţelor a determinat planul optim de transport al cimentului.

Acest produs a fost ales avîndu-se în vedere că ocupă un loc important între materialele de construcţie şi orice reducere cît de mică a cheltuielilor de transport poate conduce la economii însemnate pe economia naţională.

Pentru necesităţile de calcul, cei 500 de beneficiari din toată ţara au fost comasaţi, după anumite criterii, obţinîndu-se un număr de 240.

Ţinînd seama că producţia de ciment a fabricii din Bucureşti, în perioada considerată, se consumă exclusiv în Capitală, acest furnizor a fost exclus din calcule, producţia lui repartizîndu-se direct. De asemenea, deoarece fabricile din Cerna-Vodă şi Medgidia sînt foarte apropiate, au fost considerate un singur furnizor.

Problema a fost rezolvată, experimental, cu ajutorul metodei diferenţelor comparate, pentru trimestrele I şi II/1962.

Scanned with OKEN Scanner

Planul optim pentru trimestrul I/1962 a indicat posibilitatea realizării unor economii de 2,9 milioane t/km (5,1%) sau circa 570 mii lei, faţă de planul stabilit de Ministerul Industriei Construcţiilor. Planul optim pentru trimestrul II/1962 a indicat posibilitatea obţinerii unor economii de circa 5 milioane t/km (4,8%) sau aproximativ 840 mii lei, faţă de planul întocmit de Ministerul Industriei Construcţiilor.

O altă problemă practică soluţionată în ţara noastră s-a referit la repartizarea optimă a vagoanelor goale. În această problemă expeditorii sînt staţiile în care se creează disponibilităţi de vagoane goale, iar destinatarii sînt staţiile care solicită aceste vagoane. Această problemă a fost introdusă în practică şi se soluţionează decadal cu ajutorul maşinilor electronice C.I.F.A.

Toate aplicaţiile practice au evidenţiat că o etapă importantă în soluţionarea problemelor de transport o constituie culegerea şi prelucrarea datelor, ceea ce reclamă, în general, un volum mare de muncă.

Este necesară, în primul rînd, cercetarea desfăşurătoarelor trimise D.G.A.D.-ului de către ministere, sfaturile populare şi organizaţiile centrale în care se indică toţi beneficiarii cu cantitatea planificată a fi primită, felul produselor pe sortimente, ambalajul (saci, lăzi, vrac etc.), precum şi staţia de descărcare.

Pe baza desfăşurătoarelor se face gruparea beneficiarilor pe staţii de cale ferată (în cazul transportului pe C.F.R.). Aceasta este o operaţie care necesită un volum mare de muncă, deoarece pentru majoritatea staţiilor de cale ferată există mai mulţi beneficiari, care pot depinde de diferite organe tutelare şi care, prin urmare, apar în desfăşurătoare diferite. Pentru determinarea cantităţilor ce urmează a fi primite de fiecare staţie de cale ferată, trebuie să se întocmească o fişă şi din desfăşurătoare să se înscrie cantităţile necesare a fi descărcate la staţia respectivă. Întrucît în problemele mai mari există mii de poziţii, centralizarea beneficiarilor pe staţii C.F.R. este indicat să se facă cu ajutorul maşinilor cu cartele perforate.

După centralizarea beneficiarilor pe staţii C.F.R., numărul acestora, precum şi cel al furnizorilor fiind în general mare, iar considerarea separată a tuturor staţiilor nefiind totdeauna justificată, se impune comasarea unora dintre ei.

Dintre criteriile după care se poate face comasarea amintim :

— staţiile situate pe ramificaţiile din linia magistrală se comasează cu staţia aflată la racordarea ramurii respective la magistrală, aceasta urmînd a primi o cantitate egală cu cantităţile necesare tuturor staţiilor comasate.

Scanned with OKEN Scanner

De pildă, stațiile C.F.R. din Dobrogea pot fi comasate la stația Feteşti, toate transporturile urmînd a trece prin această stație.

Se poate demonstra matematic că acest procedeu nu influențează programul optim. Cu alte cuvinte, nu este vorba de o aproximare, ci de o simplificare admisă din punct de vedere matematic.

— stațiile C.F.R. cu repartiții mici aflate în apropierea (5—10 km) unor stații cu repartiții importante se pot comasa cu acestea din urmă. Spre deosebire de celălalt criteriu, acesta poate influența, eventual, rezultatul problemei.

— localitățile situate pe linia unor curenți de mărfuri de mare stabilitate pot fi grupate în centre situate în direcția acestor curenți de mărfuri. Prin curenții de mărfuri de mare stabilitate înțelegem anumite linii de aprovizionare care se mențin permanent, cu toate fluctuațiile producției şi consumului. Aceste linii leagă între ele localități cu un excedent, respectiv deficit de produse permanent şi de proporții mari. Grupările făcute pe baza acestui criteriu reprezintă o simplificare care nu influențează rezultatul, atît timp cît curenții de mărfuri se mențin.

Desigur că pentru fiecare problemă practică, ținînd seama de specificul ei, se pot elabora şi alte criterii de comasare.

După stabilirea cantităților necesare a fi primite de fiecare stație C.F.R. şi după efectuarea comasărilor se trece la întocmirea matricei problemei.

Pentru completarea matricei conținînd datele inițiale, în primul rînd trebuie stabilit criteriul de optimalitate, care prezintă o importanță deosebită în soluționarea oricărei probleme de programare matematică.

Alegerea citeriului de optimalitate este o problemă economică complexă, ea fiind legată de o serie de alte probleme economice, dintre care unele sînt încă în stadiu de cercetare.

Alegerea criteriului de optimalitate depinde de ceea ce se înțelege prin eficacitatea diferitelor măsuri economice. Astfel, unii economişti consideră drept criteriu al eficacității maximizarea producției, iar alții — minimizarea cheltuielilor de muncă sociale.

În socialism se urmărește producerea de bunuri materiale în cantități cît mai mari şi de înaltă calitate, în vederea satisfacerii nevoilor societății şi, de aceea, prin această prismă trebuie apreciată eficacitatea diferitelor măsuri economice.

Aplicarea acestui criteriu ridică însă multiple probleme încă nesoluționate.

Scanned with OKEN Scanner

În prezent, după unii autori, cel mai raţional ar fi să se considere drept criteriu de optimalitate minimizarea cheltuielilor de muncă sociale. Acest criteriu reflectă în mod indirect scopul producţiei socialiste şi poate fi aplicat în practică, în calcule, deoarece cheltuielile de muncă sociale în diferite ramuri de producţie sînt comensurabile.

Dar prin aceasta, problema alegerii criteriului de optimalitate nu este încă complet rezolvată. Trebuie arătat ce se înţelege prin cheltuieli sociale, deoarece există diferiţi indicatori care le caracterizează.

În problema care ne interesează, vom considera criteriile de optimalitate a unui plan de transport.

Pentru rezolvarea problemelor de transport se pot folosi mai multe criterii printre care: minimizarea cheltuielilor de transport conform tarifelor, minimizarea volumului transportului exprimat în tone-kilometri, reducerea la minim a preţului de cost al transportului etc.

În primii ani de aplicare a metodelor matematice în ţara noastră problemele de transport s-au soluţionat în cea mai mare parte pe baza criteriului de minimizare a numărului total de tone-kilometri.

Acest indicator poate fi folosit dacă toate celelalte condiţii în diferitele variante de transport sînt aceleaşi. De pildă, el se poate folosi în cazul întocmirii unui plan pentru transportul unui produs omogen, cu autocamioane de acelaşi tip, în raza unui oraş.

În cazul general, însă, acest criteriu, deşi conduce la rezultate mai bune decît cele obţinute fără aplicarea metodelor matematice, folosirea lui nu este indicată, deoarece nu reflectă fidel cheltuielile de muncă sociale. Acest criteriu nu ţine seama de specificul traseului. Astfel, folosind acest criteriu, se poate ajunge la concluzia că cheltuielile necesare transportului unei mărfi sînt aceleaşi indiferent dacă este vorba de un drum de şes sau de un drum de munte.

O altă deficienţă a acestui criteriu constă în faptul că nu ţine seama de reducerea cheltuielilor în cazul măririi distanţei de transport.

Un criteriu mai indicat este minimizarea cheltuielilor de transport conform tarifelor. Un avantaj important al acestui criteriu de optimalizare este acela că el oglindeşte legăturile economice reale, deoarece plata transportului se face conform tarifelor. Calculul planului de transport după acest criteriu, deşi nu duce la minimizarea cheltuielilor pe scara economiei naţionale, reuşeşte să reflecte totuşi plăţile efectuate de cel

Scanned with OKEN Scanner

ce suportă cheltuielile de transport. Alt avantaj al acestui criteriu este că ține seama de micșorarea cheltuielilor o dată cu mărirea distanței de transport.

Determinarea planurilor optime după criteriul tarifelor este justificat dacă nu există abateri mari în corelația dintre prețul de cost și tarifele de transport în diferite zone și dacă pentru produsul respectiv nu s-au introdus tarife excepționale.

Un alt indicator care poate fi folosit în soluționarea problemelor de transport considerăm că este prețul de cost al transportului.

Formulele[1] utilizate pentru determinarea costului transportului pe calea ferată sînt următoarele:

$$S_{vm} = \frac{K_1 [\omega + (1 + z)\,\omega_0]}{\omega} \left[\frac{0{,}03\,n + 0{,}27}{n\,q} + 10^{-7} \cdot 1324\,\mu + \right.$$

$$\left. + 10^{-5} \cdot 24 \right] + \frac{K_2 (1+z)}{\omega}$$

și

$$S_m = S_{vmp}\,[1 + f(d)] \text{ cu } f(d) = \frac{2{,}5}{d} \sqrt{35\,(d + 33)},$$

în care:

S_{vm} reprezintă prețul de cost parțial aferent cheltuielilor variabile, în lei/tona-km marfă, corespunzător unei secții sau tronson;

K_1 — costul specific mediu pe tren-km, aferent unor cheltuieli variabile privind activitatea de mișcare, tracțiune și întreținere a căii (inclusiv reparațiile la locomotive);

K_2 — costul specific mediu pe osie/km, aferent unor cheltuieli variabile privind serviciile de vagoane (inclusiv reparațiile);

ω — încărcătura dinamică pe osie, în tone marfă/osie;

z — coeficientul de parcurs gol al vagoanelor;

ω_0 — tara medie pe osie, în tone/osie;

Q — tonajul brut pe tren în cazul simplei tracțiuni;

μ — consumul specific de combustibil, în kgcc/sute tone brute-km;

n — numărul locomotivelor care remorchează trenul;

S_m — prețul de cost total, corespunzător unei rute formată din mai multe secții, în lei/tone-km marfă;

[1] Aceste formule au fost elaborate de conf. Lelescu Gh., de la Institutul Politehnic București.

Scanned with OKEN Scanner

S_{vmp} — prețul de cost parțial aferent cheltuielilor variabile;
d — lungimea rutei respective, în km.

Cu prima formulă s-au calculat prețurile de cost parțiale aferente cheltuielilor variabile pentru fiecare secție sau tronson ce formează laturi de poligon ori porțiuni din acestea, în funcție de caracteristicile de remorcare, de profilul liniei și de gradul de utilizare a materialului rulant.

Datele introduse în prima formulă au fost cele corespunzătoare realizărilor din anul 1962 și sînt permanent corectate în ceea ce privește consumul de combustibil pe secțiile unde trenurile sînt remorcate de locomotive diesel electrice.

Prețul de cost mediu ponderat, aferent cheltuielilor variabile pentru întreaga rută, se calculează după formula:

$$S_{vmp} = \frac{K \sum_{1}^{n} S_{vmk} \cdot Q_k \cdot d_k}{K \sum_{1}^{n} Q_k d_k},$$

în care:

S_{vmp} reprezintă prețul de cost parțial aferent cheltuielilor variabile, corespunzător unei secții sau tronson (k);
Q_k — tonajul brut pe tren, corespunzător secției (k);
d_k — lungimea secției sau tronsonului (k);
n — numărul secțiilor sau tronsoanelor ce formează ruta.

Pentru calculul prețului de cost total corespunzător unei rute se utilizează formula de mai sus.

Funcția $f(d)$ a fost determinată ținînd seama de regresivitatea prețului de cost în funcție de distanță și în ipoteza unei variații parabolice a cheltuielilor considerate fixe, pe media rețelei, în raport cu distanța.

Coeficienții din funcția $f(d)$ sînt stabiliți cu condiția ca la distanța zero costul specific pe tona transportată să fie egal cu cheltuielile de pregătire a transportului, iar la distanța medie de transport a rețelei, prețul de cost să fie egal cu prețul de cost mediu al rețelei întregi.

Pentru poligoanele de rețea mai mici, unde mijloacele de remorcare și declivitățile nu sînt substanțial diferite, se utilizează cu rezultate bune formula de mai sus, iar pentru relațiile magistrale, care parcurg mai multe poligoane cu sisteme de remorcare diferite și cu declivități mari se poate folosi și o altă relație dată de ing. I. Săndulescu [1].

[1] Vezi „Revista Căilor Ferate" nr. 9/1963.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre cele trei criterii arătate, ultimul îl considerăm mai bun. Cu toate acestea el prezintă unele deficiențe, dintre care cea mai importantă este că nu ține seama de plusprodusul creat de munca lucrătorilor din transporturi și deci nu caracterizează complet cheltuielile de muncă sociale.

Problema stabilirii celui mai bun criteriu de optimalitate trebuie să fie cercetată în continuare de economiști în vederea elaborării unui indicator care să reflecte cît mai bine cheltuielile de muncă sociale.

Analiza rezultatelor obținute prin aplicarea unuia sau altuia dintre cele trei criterii prezintă un interes deosebit.

În acest sens, în cadrul grupei de cercetări economico-matematice din Ministerul Finanțelor au fost soluționate cîteva probleme, folosindu-se mai multe criterii de optimalitate.

§ 1. Determinarea planului optim de transport al păcurii

O primă problemă rezolvată după mai multe criterii s-a referit la transportul păcurii.

Direcția Generală de Aprovizionare și Desfacere din Ministerul Industriei Petrolului și Chimiei cunoscînd planul de producție al rafinăriilor, cererile consumatorilor interni și cantitățile ce urmează a fi exportate, întocmește lunar planul de transport.

După efectuarea unor comasări, făcute potrivit criteriilor enunțate la începutul capitolului, s-a ajuns la soluționarea unei probleme de transport cu 3 expeditori și 125 consumatori. Numărul expeditorilor fiind numai de trei, apriori s-a presupus că nu vor exista diferențe sensibile între planul optim și planul determinat de lucrătorii din minister fără ajutorul metodelor matematice. După soluționare, care s-a făcut de un singur om, cu ajutorul metodei diferențelor comparate, în mai puțin de 3 ore, s-a constatat o economie de circa 183 mii lei. Ținînd seama că volumul transporturilor lunare sînt aproximativ egale, înseamnă că prin aplicarea metodelor matematice la transportul acestui produs se pot economisi anual circa 2,1 milioane lei.

În tabelul 2.6.01 se dă planul de transport întocmit de M.I.P.Ch. fără ajutorul metodelor matematice. În tabelele 2.6.02—2.6.07 se dau matricele conținînd datele inițiale precum și soluțiile optime obținute pe baza celor trei criterii enunțate.

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza tabelelor 2.6.01—2.6.07, s-au obținut următoarele rezultate:

Nr. crt.		Total t/km (mii)	Distanța medie (km)	Costul conform tarifului (mii lei)	Cheltuielile de transport (mii lei)
1	Planul întocmit de M.I.P.Ch.	70 606	191	14 898	9 703
2	Planul optim după criteriul distanței — în km	69 664	188	14 753	9 555
3	Planul optim după criteriul tarifului	69 674	188	14 749	9 547
4	Planul optim după criteriul costului transportului	69 836	190	14 797	9 520

După cum se vede din tabelul de mai sus, indiferent de criteriul aplicat, planurile obținute cu ajutorul metodelor matematice au fost mai bune decît cele întocmite de către organele de aprovizionare-desfacere, pe baza metodelor obișnuite.

Reducerile față de planul întocmit de M.I.P.Ch. obținute prin aplicarea celor trei criterii se văd din următorul tabel:

Nr. crt.		Reducerea totalului t/km (mii)	Reducerea distanței medii (km)	Reducerea cheltuielilor conform tarifului (mii lei)	Reducerea cheltuielilor de transport (mii lei)
1	Conform planului optim calculat după criteriul distanței—în km	942	3	145	148
2	Conform planului optim calculat după criteriul tarifului	932	3	149	156
3	Conform planului optim calculat după criteriul costului transportului	770	1	101	183

După cum se vede din tabelul de mai sus, planul optim calculat după criteriul minimizării cheltuielilor de transport, față de planurile optime calculate după criteriul minimizării tonelor-kilometri sau al tarifelor, duce la o reducere mai mică a volumului de transport sau a plății conform tarifelor. În schimb, se obține o reducere mai mare a prețului de cost al transportului, ceea ce reprezintă o problemă deosebit de importantă pentru economia națională.

§ 2. Determinarea planului optim de transport al cărbunelui necesar unităților C.F.R.

O altă problemă de transport soluționată în cadrul grupului de cercetări economico-matematice din Ministerul Finanțelor, după mai multe criterii, se referă la cărbunele necesar C.F.R.

Cunoscînd cantitățile de cărbune puse la dispoziția C.F.R. de către Ministerul Minelor și Energiei Electrice, Direcția

Scanned with OKEN Scanner

Generală a Căilor Ferate întocmeşte lunar planul de repartiţie a cărbunelui, de la un număr însemnat de mine la toate unităţile C.F.R. Şi de data aceasta pentru uşurarea calculului s-au făcut o serie de comasări ajungîndu-se la soluţionarea unei probleme de transport avînd matricea de 12 × 59. Problema s-a soluţionat în două variante : folosind criteriul minimizării totalului tonelor-kilometri şi folosind criteriul minimizării preţului de cost al transportului. Calculele s-au efectuat cu maşina electronică C.I.F.A. 101.

Rezultatele obţinute cu ajutorul celor două criterii sînt arătate în tabelul de mai jos :

Nr. crt.		Totalul t/km (mii)	Distanţa medie (km)	Costul conform tarifului (mii lei)	Cheltuielile de transport (mii lei)
1	Planul întocmit de M.T.Tc.	19 944	180	1 655	2 646
2	Planul optim după criteriul distanţei — în km	16 950	153	1 491	2 469
3	Planul optim după criteriul costului transportului	17 608	159	1 505	2 398

Şi în cazul acestei probleme, prin aplicarea celor două criterii, se obţin rezultate diferite. Diferenţa dintre rezultatele obţinute prin aplicarea celor două criterii rezultă şi din următorul tabel, în care sînt trecute diferenţele faţă de planul întocmit de M.T.Tc.

Nr. crt.		Reducerea totalului t/km (mii)	Reducerea distanţei medii (km)	Reducerea cheltuielilor conform tarifelor (mii lei)	Reducerea costului transportului (mii lei)
1	Conform planului optim calculat după criteriul distanţei — în km	2 994	27	164	177
2	Conform planului optim calculat după criteriul costului transportului	2 335	21	150	248

În urma rezultatelor obţinute pentru luna august 1963, M.T.Tc. a trecut la calcularea lunară a planurilor optime şi la aplicarea lor în practică.

După soluţionarea problemei de transport a cărbunelui numai la nivelul unui singur mare beneficiar (C.F.R.) ea a fost soluţionată la nivel republican.

În concluzie, din problemele expuse se poate vedea că cel mai eficace criteriu pentru soluţionarea problemelor de transport este cel al minimizării cheltuielilor de transport.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.01.

Planul de transport al păcurii determinat fără folosirea metodelor matematice

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1 500			1 860	533	100	1 973		2 136				
2		305	150					525	628				
3		1 100						2 027	2 509	170	570	4 015	1 600
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
900					1 300	500									
	2 750	100	200	150			1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
500	700	2 200	450	20 1 700	7 500	2 780	2 400	1 500	400 2 100	500	450	600	2050	800	68	85
500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85

Scanned with OKEN Scanner

(Continuarea tabelului 2.6.01.)

Centre de expediție \ Centre de destinație	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
1	37			49			300				3 166	150	
2		2220	15		120	200		720	714	100	400		51
3													
Cantitatea necesară	37	2220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	28 179 44 480 296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.0.

Matricea conținînd datele inițiale ale problemei de transport a păcurii (criteriul: minimizarea totalului tonelor—kilometri)

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	31	623	628	89	149	175	125	223	167	177	270	279	275
2	75	579	584	133	193	219	169	177	211	221	314	323	318
3	188	544	549	246	306	332	232	111	172	162	51	60	55
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
291	280	296	360	297	296	293	147	569	549	120	142	252	312	319	269	400
335	324	340	398	341	340	337	191	525	505	76	98	253	356	363	313	356
72	61	99	135	78	77	74	72	482	470	213	191	36	469	476	137	442
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
44	475	484	487	648	339	269	165	254	329	333	298	442	332	331	284
0	515	500	527	596	297	313	209	298	373	377	342	486	376	375	328
263	256	265	268	561	434	426	112	174	249	253	218	362	252	251	204
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 215	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

Continuarea tabelului 2.6.02

Centre de expediție \ Centre de destinație	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
1	420	511	517	160	79	357	405	245	243	245	365	417	581
2	464	551	557	204	35	401	449	289	287	289	321	373	537
3	340	292	298	203	254	138	186	352	350	352	458	510	502
Cantitatea necesară	60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
56	553	716	759	173	542	554	547	455	365	394	219	216	205	226	259	242
100	509	672	705	217	498	510	503	471	409	438	263	260	249	270	303	286
163	595	607	640	330	413	415	408	236	146	175	0	3	14	13	46	25
2 800	3 662	150	200	2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
269	278	282	133	369	536	373	352	465	475	234	75	392	640	305	519	299
313	322	326	177	410	492	329	308	421	431	278	119	348	596	349	549	255
52	62	66	290	147	629	260	239	386	396	391	182	340	561	86	362	392
34	150	200	450	500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600

Scanned with OKEN Scanner

94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
589	233	428	478	0	663	267	267	195	179	92	533	735	679	611	623	112
629	277	384	432	44	619	223	311	151	135	136	489	691	635	651	654	158
370	58	470	569	219	525	360	424	288	272	127	454	656	600	392	404	105
2 050	800	68	85	37	2 220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
428	434	406	324	191	207	235	223	297	266	565	669	380	658	76	28 179
384	390	362	280	147	163	191	267	341	310	521	625	336	624	120	44 480
315	317	499	417	142	126	186	146	454	423	658	536	267	589	143	296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.03.

Planul optim de transport al păcurii (criteriul: minimizarea totalului tonelor-kilometri)

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1 500			1 860	533	100	1 973		4 251				
2		1 405	150					2 602	1 022	170	570	4 015	1 600
3													
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450
2400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
500	700	2 200	450	1 720	6 129 1 371	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85
500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85

Scanned with OKEN Scanner

(Continuarea tabelului 2.6.03.)

Centre de expediție \ Centre de destinație	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
1	37			49			300						
2		2 220	15		120	200		720	714	100	3 566	150	51
3													
Cantitatea necesară	37	2 220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	28 179 44 480 296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.04

Matricea conținînd datele inițiale ale problemei de transport al păcurii (criteriul : minimizarea plăților conform tarifelor C.F.R.)

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	313	1 932	1 932	448	610	691	556	853	664	691	961	961	961
2	421	1 770	1 851	583	745	799	664	691	799	853	1 068	1 122	1 068
3	718	1 689	1 689	907	1 068	1 122	853	529	691	664	367	367	367
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	1700	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1 014	961	1 014	1 176	1 014	1 014	1 014	610	1 770	1 689	529	610	907	1 068	1 068	961	1 284
1 122	1 122	398	1 284	1 176	1 122	1 122	718	1 689	1 608	421	475	907	1 176	1 230	1 068	1 176
421	394	475	583	421	421	421	421	1 527	1 527	799	745	313	1 527	1 527	583	1 446
145	120	350	18 042	664	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
340	1 527	1 527	1 527	2 013	1 122	961	664	907	1 122	1 122	1 014	1 446	1 122	1 122	1 014
0	1 608	1 608	1 689	1 851	1 014	1 068	799	1 014	1 230	1 230	1 176	1 527	1 230	1 230	1 122
961	907	961	961	1 770	1 446	1 365	529	691	907	907	799	1 230	907	907	799
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

(Continuarea tabelului 2.6.04.)

Centre de expediție \ Centre de destinație	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1 365	1 608	1 608	637	421	1 176	1 365	907	907	907	1 230	1 365	1 851
2	1 527	1 770	1 770	799	313	1 365	1 446	1 014	1 014	1 014	1 122	1 230	1 689
3	1 122	1 014	1 014	799	907	583	718	1 176	1 176	1 176	1 446	1 608	1 608
Cantitatea necesară	60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
367	1 770	2 229	2 363	691	1 689	1 770	1 689	1 446	1 230	1 284	799	799	799	853	907	907
475	1 608	2 094	2 229	799	1 608	1 608	1 608	1 527	1 365	1 446	961	907	907	961	1 068	1 014
664	1 851	1 851	1 932	1 122	1 365	1 365	1 365	853	610	691	0	286	286	286	340	286
2 800	3 662	150	200	2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
961	961	1 014	583	1 230	1 689	1 230	1 176	1 527	1 527	853	421	1 284	1 932	1 068	1 608	1 014
1 068	1 122	1 122	691	1 365	1 608	1 122	1 068	1 365	1 446	961	529	1 176	1 851	1 176	1 689	907
367	394	394	1 014	610	1 932	907	853	1 284	1 284	1 284	718	1 122	1 770	448	1 230	1 284
34	150	200	450	500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600

Scanned with OKEN Scanner

94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
1 851	853	1 365	1 527	0	2 013	961	961	745	691	475	1 689	2 229	2 094	1 932	1 932	529
1 932	961	1 284	1 446	340	1 932	853	1 068	637	583	583	1 527	2 094	1 932	2 013	2 013	637
1 230	367	1 527	1 770	799	1 689	1 176	1 365	1 014	961	556	1 446	2 013	1 851	1 284	1 365	502
2 050	800	68	85	37	2 220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
1 365	1 446	1 365	1 122	745	799	853	853	1 014	961	1 770	2 013	1 230	2 013	421	28 179
1 284	1 284	1 230	961	610	664	745	961	1 176	1 068	1 689	1 932	1 122	1 932	529	44 480
1 068	1 068	1 608	1 365	610	556	718	610	1 446	1 365	2 013	1 689	961	1 851	610	296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.05.

Planul optim de transport al păcurii (criteriul : minimizarea plăților, conform tarifelor C.F.R.)

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1 500			1 860	533	100	1 973		5 273	170			
2		1 405						2 602			570	4 015	1 600
3			150										
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
60	100	60	2 215	900	450	300	2 007 1 243	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
500	700	2 200	450	1 720	4 661 2 839	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85
500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85

Scanned with OKEN Scanner

(Continuarea tabelului 2.6.05.)

Centre de destinație / Centre de expediție	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
1	37			49			300						51
2			15		120	200		720	714	100			
3		2 200									3 566	150	
Cantitatea necesară	37	2 200	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
								432	150					100	28 179
430	230	221	646	450	350	50	300			11 408	135	25	100		44 480 296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.06

Matricea conținînd datele inițiale ale problemei de transport a păcurii (criteriul : minimizarea prețului de cost al transportului)

Centre de expediție \ Centre de destinație	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	37	621	626	77	148	182	137	257	163	171	246	256	251
2	83	575	580	133	204	238	182	211	209	217	292	302	297
3	164	510	515	204	275	309	219	146	140	132	45	55	50
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
271	256	297	344	273	272	269	141	709	750	147	170	247	351	356	267	472
317	302	343	390	319	318	315	187	754	795	102	125	300	397	402	313	426
70	55	165	143	72	71	68	60	507	548	255	232	46	478	483	135	464
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
54	406	421	421	646	409	262	168	245	320	324	297	441	327	339	275
8	451	466	466	600	363	308	214	291	366	370	343	487	373	385	321
255	204	219	219	535	502	389	91	168	243	247	220	364	250	262	198
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

Continuarea tabelului 2.6.06

Centre de expediție \ Centre de destinație	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
1	419	435	441	159	97	333	390	290	287	284	458	470	606
2	465	472	478	205	51	378	435	335	332	329	412	424	560
3	342	233	239	168	297	131	188	372	369	366	555	563	495
Cantitatea necesară	60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
59	614	872	922	159	579	579	574	400	340	375	201	198	189	218	258	226
105	567	917	967	205	523	523	518	445	385	420	247	244	235	264	304	272
142	606	664	714	286	364	364	359	198	138	173	0	3	9	17	57	25
2 800	3 662	150	200	2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
251	261	271	123	322	576	373	381	488	500	213	80	445	667	286	505	358
297	307	317	169	367	530	327	335	442	454	259	126	399	621	331	542	312
50	60	70	250	120	669	262	270	377	389	340	163	360	556	84	303	465
34	150	200	450	500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600

Scanned with OKEN Scanner

94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
547	232	498	522	0	765	327	276	243	223	131	555	743	709	579	595	111
592	277	452	476	46	812	281	322	197	177	137	480	697	663	624	640	157
345	59	490	615	201	563	434	403	350	330	70	441	632	598	377	393	90
2 050	800	68	85	37	2 220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
436	430	514	409	223	240	283	441	328	275	634	769	411	721	77	28 179
390	384	468	361	177	194	237	478	374	321	588	816	365	675	123	44 480
325	315	621	516	179	163	239	239	455	402	670	567	300	610	124	296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.6.07

Planul optim de transport al păcurii (criteriul: minimizarea prețului de cost al transportului)

Centre de destinație / Centre de expediție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1 500			1 860	533	100	1 973		2 385				
2		1 405	106					2 602					
3			44						2 888	170	570	4 015	1 600
Cantitatea necesară	1 500	1 405	150	1 860	533	100	1 973	2 602	5 273	170	570	4 015	1 600

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102
145	120	350	18 042	64	144	1 200	2 469	3 500	1 200	1 500	150	1 200	1 700	300	250	1 102

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000
900	2 750	100	200	150	1 300	500	1 200	3 000	3 285	104 175	13 375	950	1 100	2 700	3 000

Scanned with OKEN Scanner

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200
60	100	60	2 215	900	450	300	3 250	34	180	1 200	500	200	2 800	3 662	150	200

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450
2 400	1 500	50	45	1 500	2 080	280	94 291	6 050	68	15	51	250	34	150	200	450

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85
500	700	2 200	450	1 720	7 500	2 780	2 400	1 500	2 500	500	450	600	2 050	800	68	85

Scanned with OKEN Scanner

(Continuarea tabelului 2.6.07

Centre de expediție \ Centre de destinație	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
1	37			49									51
2		2 220	15		120	200		720					
3							300		714	100	3 566	150	
Cantitatea necesară	37	2 220	15	49	120	200	300	720	714	100	3 566	150	51

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	Cantitatea disponibilă
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	28 179 44 480 296 960
430	230	221	646	450	350	50	300	432	150	11 408	135	25	100	100	Total 369 619

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

M. Altăr şi D. Rădulescu, *O metodă de soluţionare a problemelor de transport*, în „Studii de statistică", 1962, comunicări ţinute la sesiunea ştiinţifică D.C.S., 29—30 noiembrie 1961.

B. Bereanu, *Problema stohastică a transportului*, partea I — II-a, comunicările Academiei R.P.R. nr. 4/1963.

E. Balaş şi P. Ivănescu, *Probleme de transport cu parametri*, în „Studii şi cercetări matematice", 1961, nr. 2.

E. Balaş şi P. Ivănescu, *Probleme de transporturi cu centre variabile*, în „Studii şi cercetări matematice", 1961, nr. 2.

E. Balaş şi P. Ivănescu, *Probleme de transporturi cu producţie neomogenă*, în „Studii şi cercetări matematice" 1962, nr. 1.

E. Balaş şi P. Ivănescu, *O metodă pentru rezolvarea problemei de transporturi*, comunicările Academiei R.P.R. nr. 9/1961.

F. Coţiu, *Asupra unei probleme de transport propusă de Sfatul regional Cluj*, în „Studii şi cercetări de matematică" (Cluj), anexă, 1961—1962.

H. Ionescu, P. Mirescu şi I. Nădejde, *Programarea liniară*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1964.

I. Kolumban, *Asupra metodei lui Egervary pentru rezolvarea problemei transporturilor*, în „Studii şi cercetări de matematică" (Cluj) anexă, 1961—1962.

Acad. Gh. Mihoc şi V. Urseanu, *Matematici aplicate în statistică*, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1962.

I. Measnicov şi M. Altăr, *Metodele matematice — mijloc eficace de economisire a resurselor materiale*, în „Probleme economice", 1962, nr. 11.

E. Moldovan, *Asupra problemei transporturilor*, în „Studii şi cercetări de matematică" (Cluj), anexă la tom. XI (1960).

G. Lelescu, *Probleme de preţ de cost feroviare*, Editura transporturilor şi telecomunicaţiilor, Bucureşti, 1961.

Применение математических методов в экономике и планировании, том I: *Общие вопросы применения математики в экономике и планировании*; том IV: *Линейное программирование*; том V: *Математические методы в планировании и эксплуатации на транспорте*, Издательство Академии Наук СССР, 1961.

И. Я. Бирман, *Транспортная задача линейного программирования*, Издательство Экономической Литературы, Москва, 1961.

Е. П. Нестеров, *Транспортные задачи линейного программирования*, Всесоюзное издательско-полиграфическое объединение Министерства путей сообщения, Москва, 1962.

Л. В. Канторович, *Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов*, Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1960.

N. N. Reinfeld, W. R. Vogel, *Matematical programming*, Englewood cliffss, N. Y., 1958.

G. B. Dantzig, *Application of the Simplex method to a transportation problem*, în „Monograph" nr. 13., New York, 1951.

S. Gass, *Linear Programming*, New York, 1958.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERIE

pag.

Prefață 3

Introducere 7

PARTEA I

PROBLEMA GENERALĂ DE TRANSPORT

Capitolul I — *Determinarea soluției inițiale* 23
§ 1. Procedeul colțului nord-vest 24
§ 2. Procedeul elementului minim pe linie 27
§ 3. Procedeul elementului minim pe coloană 30
§ 4. Procedeul elementului minim din tabel 32

Capitolul al II-lea — *Determinarea soluției optime prin metoda distributivă* 35

Capitolul al III-lea — *Determinarea soluției optime prin metoda distributivă modificată* 67

Capitolul al IV-lea — *Problema degenerării și alte cazuri speciale* 85
§ 1. Problema degenerării 85
§ 2. Situația cînd disponibilitățile depășesc nevoile consumatorilor 93
§ 3. Situația cînd disponibilitățile sînt mai mici decît nevoile consumatorilor 96
§ 4. Situația cînd anumite rute nu se pot utiliza 101

Capitolul al V-lea — *Metoda diferențelor comparate* 105

Capitolul al VI-lea — *Metoda aproximativă a diferențelor maxime* (*Metoda Vogel*) 119

Capitolul al VII-lea — *Alte probleme economice ce se pot rezolva cu modelul problemei de transport* 124
§ 1. Problema repartiției optime a sarcinilor pe mașini 124
§ 2. Problema repartiției optime a sarcinilor de producție pe întreprinderi 130
§ 3. Problema repartiției optime a sarcinilor de producție a unui produs omogen între întreprinderile unei ramuri industriale ținînd seama de cheltuielile de producție și de transport . . 132
§ 4. Problema de transport avînd drept criteriu minimizarea timpului de parcurs 134
§ 5. Problema alegerii 141

PARTEA a II-a

Capitolul I — *Problema parametrică de transport* 149
§ 1. Cazul cînd structura expeditorilor și a beneficiarilor rămîne neschimbată 150
§ 2. Cazul cînd se modifică fie structura expeditorilor, fie structura beneficiarilor 161

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 3. Cazul cînd se modifică atît structura expeditorilor, cît şi structura destinatarilor 167

Capitolul al II-lea — *Problema de transport pentru produse (sortimente) parţial interschimbabile* 172

Capitolul al III-lea — *Problema de transport cu capacităţi limitate* 185

Capitolul al IV-lea — *Problema de transport cu centre intermediare* 199

Capitolul al V-lea — *Problema generală a programării liniare* 210

Capitolul al VI-lea — *Unele aspecte privind aplicarea în practică a problemei de transport* 231

§ 1. Determinarea planului optim de transport al păcurii. 239

§ 2. Determinarea planului optim de transport al cărbunelui necesar unităţilor C.F.R. 240

Bibliografie 263

Scanned with OKEN Scanner

Redactor responsabil: MARIA BLAGA
Tehnoredactor: VICTORIA STĂNCULESCU

Dat la cules 17.02.1964. Bun de tipar 15.08. 1964. Tiraj 2000+125 ex. Hîrtie semivelină 63 g/m². Format 61×86/16. Coli editoriale 11,73. Coli de tipar 16,75. A 162. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari 51:33, pentru bibliotecile mici 51:33.

Tiparul executat sub comanda nr. 766 la Intreprinderea Poligrafică Informația Str. Brezoianu nr. 23–25, București, R.P.R.

29

Scanned with OKEN Scanner